受講する皆さんへ

ようこそ，スタディサプリ スタンダードレベル数学Ⅰの講座へ。この講座は

「数学Ⅰを，用語の意味や公式のなりたちから学び，問題演習を通じて深めたい」

という人に適した講座となっています。

数学Ⅰでは，高校数学の礎(いしずえ)とも言える内容を学習します。この講座では，算数や中学校の数学の学習で得た知識や経験を時に振り返りながら，新たな知識や考え方を，１つ１つ，丁寧に，あなたと一緒に積み重ね，さらに演習で理解を深めることが可能です。

予習は必要ありません。「講義動画」で，いちから説明します！

テキストの使い方，講座の受講の仕方については，後ほど詳しく説明します。

この講座を受講いただくことで，学校の授業の理解をより深めたり，学校から課された宿題を解きながらそこで問われている内容を確認したり，といったことが可能になります。しかし，この講座で扱う内容は，決して簡単ではありません。だからこそ，あなたがこの講座を通じて数学Ⅰと本気で向き合うことで

「なるほど，そういうことか！」を積み重ね，自分の成長を実感する

ことができると確信しています。

「人から人へ」。それは時代がどんなに進歩しても変わることがありません。スタディサプリの講師は，いつでも「あなた」が真剣に学びに向かう姿を思い浮かべながら授業しています。あなたが本気で講師から学び，学んだことが何だったのかを考え，問題を通じてそれを確認し, 自分のものにする, そういった一連の体験をこの講座を通じて提供いたします。そして，あなたがそうして得たことを，様々なアウトプットを通じて，今度はあなたが誰かに伝えていただきたいと思います。

講義を１回受けてわからなければ，何度でも，自分のペースで，講義を見返すことが可能です。ただし，最初から完璧な理解を目指す必要はまったくありません。まずは「たぶんこういうことだろうな」といったように，全体像をざっくり捉えることから始めましょう。その状態で先に進み，前に習った知識を使うことで，その意味がわかる，というのも数学ならではですし，気になって前に戻り改めて理解を深める，ということも可能です。その学び方やペースは，他の人と比較する必要はありません。

学びにおいて，主役は「あなた」です

あなたの，あなたならではの学びを，この講座が力強くサポートします。ようこそ『スタディサプリ』の世界へ！

山内　恵介

目次

第 1 章　数と式

第 1 講　式の計算と展開
PART1　整式の整理
PART2　整式の加法と減法，乗法
PART3　展開
PART4　展開の工夫

第 2 講　因数分解
PART1　因数分解
PART2　たすきがけによる因数分解
PART3　おき換えによる因数分解
PART4　1 文字整理による因数分解

第 3 講　実数，1 次不等式
PART1　実数，絶対値
PART2　根号を含む式の計算
PART3　1 次不等式
PART4　絶対値を含む方程式・不等式

第 4 講　集合，命題と条件
PART1　集合
PART2　命題と条件
PART3　必要条件と十分条件，条件の否定
PART4　逆・裏・対偶，命題の証明

第 2 章　2 次関数

第 5 講　2 次関数とグラフ
PART1　関数とグラフ，1 次関数の最大値，最小値
PART2　$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ
PART3　平方完成と $y=ax^2+bx+c$ のグラフ
PART4　放物線の平行移動・対称移動

第 6 講　2 次関数の最大・最小，2 次関数の決定
PART1　2 次関数の最大・最小
PART2　2 次関数の最大・最小（定義域の変化）
PART3　2 次関数の最大・最小（軸の移動）
PART4　2 次関数の決定

第 7 講　2 次方程式・2 次不等式
PART1　2 次方程式の解法，実数解の個数
PART2　2 次関数のグラフと x 軸の共有点
PART3　2 次不等式と 2 次関数のグラフ
PART4　2 次不等式（x 軸と接する，共有点をもたない）

第 8 講　2 次不等式の利用
PART1　2 次関数のグラフと 2 次方程式・2 次不等式
PART2　連立不等式
PART3　2 次関数のグラフと x 軸の共有点の位置
PART4　2 次方程式の解の存在範囲

第３章　図形と計量

第９講　鋭角の三角比
PART1　直角三角形と三角比
PART2　有名角の三角比，三角比の表
PART3　三角比の相互関係
PART4　$90^\circ-\theta$ の三角比，三角比の利用

第 10 講　三角比の拡張
PART1　座標を用いた三角比の定義
PART2　単位円を用いた三角比の定義
PART3　三角比の値と角，直線の傾きと正接
PART4　$180^\circ-\theta$ の三角比，単位円と三角比の相互関係

第 11 講　正弦定理・余弦定理，三角形の面積
PART1　正弦定理
PART2　余弦定理
PART3　三角形の決定
PART4　三角形の面積

第 12 講　図形の計量
PART1　角の二等分線の長さ，三角形の内接円と面積
PART2　円に内接する四角形の面積
PART3　直方体の切り口
PART4　四面体の切り口

第４章　データの分析

第 13 講　データの分析
PART1　データの整理，データの散らばり，外れ値
PART2　分散と標準偏差
PART3　データの相関
PART4　仮説検定

講座の受講の仕方

ここでは,効果的な講座の受講の仕方についてお伝えします。講座は大きく「テキスト」「講義動画」「解答」に分かれています。この３つを効果的に使い,実力を伸ばしていきましょう。

①　テキストについて

この講座のテキストは，講ごとに４つのPART(パート)に分かれています。

各PARTは，次のような項目で構成されています。

「例題」

⇒　そのPARTで習得すべき知識・技能を確認するための問題

「練習」

⇒　「例題」で得た知識・技能を確認する問題

「Point Pickup」

⇒　「例題」「練習」を解くために必要な知識・技能を整理

「確認問題」

⇒　「例題」「練習」で学んだことを確認するための問題

「例題」「練習」「Point Pickup」については，「動画」で解説を行います。ある講に含まれるPARTの一部または全部が未習,または理解が不十分の状態で講義を受講いただいても,まったく問題ありません。また，予習は必要ありません。

②　講義動画について

受講の準備ができましたら,テキストと筆記用具を手元におき,動画を再生してください。そして,真剣に受講して,講師がこの動画を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。

各講に含まれるPART内の動画は，２つのチャプターに分かれています。

(例)　第１講　式の計算と展開

PART1　整式の整理　…　要点整理＆「例題」解説・「練習」解説

それぞれのPARTにおける主な受講の流れを説明します。

(1)　まずは，要点整理としてこのPARTで習得すべき用語や知識，公式およびその成り立ちを解説します。この要点整理の内容は，テキストには掲載しておりません。必要に応じて，ノート等に残しておきましょう。

その後,「Point Pickup」にて,要点整理を通じて習得したことをまとめ,確認します。

次に，「Point Pickup」でまとめ，確認した知識や考え方を元に，「例題」を解いていきます。それぞれの問題が，どのようにして解答に至るかを，そのプロセスも含めて動画でじっくり学んでください。途中で動画を一次停止しながら，途中計算等をテキストやノートに書いていただいて構いませんが，大切なのは集中して授業を受講することです。「別冊解答」には，講義問題の解答解説が掲載されておりますので，動画の途中計算をすべて書き写す必要はありません。書くことに集中するのではなく，講師の言葉の一つひとつにしっかりと耳を傾けてください。

⑵　次に，「例題」で確認した問題の解き方を参考にして，「練習」を自分で解いてみましょう。途中で解き方がわからなくなった場合は，そこで手を止めて結構です。解き終わったら，動画で解き方を確認してください。解答があっているか，間違っているか，だけでなく，解くときに使った考え方が同じかどうか，もし異なるならどういう違いがあるのか，などを確認しながら授業を受講しましょう。

⑶　さらに，解説された「例題」「練習」を，何も見ずに自分で解いてみましょう。途中で手が止まってしまった場合は，ノートや別冊解答を参照して，どこに止まった原因があったのかを振り返り，その続きからまた解き進めてみましょう。

各 PART の学習の流れを，今一度確認してみましょう。

要点整理→「Point Pickup」&「例題」→「練習」→「自分で問題を解く」

1 つの PART でおよそ 30 分～ 1 時間程度の受講時間となります。

各講に含まれる 4 つの PART の受講が終了すると，その講が終了します。時間がない時は，PART 単位の受講でも構いません。また，週末にまとめて 1 講分受講してもよいでしょう。

大切なのは

・「新しい知識や考え方を知って，思考の幅を広げる」

・「講師が伝えたこと」を「自分で他の人に伝えられるようにする」

・「問題が解けるようになることがゴールではなく，前提となる知識・考え方を学ぶ」

という気持ちで受講することです。

動画で学ぶことに慣れていない人や，数学が苦手な人は，最初は「授業が速い！」と感じるかもしれませんが，安心してください。この講座は，いつでも画面を停止できます。「ん？」と思ったら止めて，いま伝えられたことがどういう意味を持つのかを考えること，必要なら戻って何度も聞くこと。焦る必要はありません。そして，講座の受講を進めていくうちに，感じ取り，表現できるスキルが向上することで，一度で聞き取れる，感じ取れる内容が増えていくでしょう。

もう１つ大切なこと，それは

・「やっぱり自分はできないんだ……」は厳禁！

だということです。あきらめず，何度でもチャレンジすること。あなたには，あなたがまだ気付いていないかもしれない，「理解する力」が必ずあります。

③　復習について

その日の動画の受講が完了したら

・この PART・講から何を学んだか

を思い浮かべてみましょう。必要に応じてテキストをもう一度見直してみましょう。

また，後日，「例題」「類題」をもう一度解くことで，

・この PART・講を受講して何ができるようになったか

を確かめてみましょう。もし解法が全然思いつかない，すっかり忘れてしまった，という場合は，まずはノートや別冊解答を，それでも思い出せない場合は動画を見直してみましょう。記憶がよみがえるはずです。

・「復習することで，学んだことを自分のものにする」

という気持ちを忘れないようにしましょう。

④　確認問題について

①～③が終わると，自分がその PART の内容を本当に理解しているのかを，別の問題で確かめたくなるはずです。各 PART の終わりに**「確認問題」**を用意してあります。「例題」「類題」と同様，その PART で学んだ知識・考え方を確認することができる問題セットとなっていますので，この PART で学んだことを思い出しながら，自力で解いてみましょう。

解き終えたら，「別冊解答」を見て，解き方をチェックしてみましょう。

・「問題を解くことで，知識を引き出し，使う練習をする」

単なる反復練習ではなく，学んだことを思い出しながら解く，それを忘れないでください。

以上を繰り返すことにより，飛躍的に理解が深まり，数学Ⅰの世界観が少しずつ見えてくるようになってきます。

受講を続ける上で大切なのは

・ペースを作り，守る

ことです。各PART，およそ30分～1時間。それを，どこの曜日のどの時間帯に何PART(何講)受講するのかを決めるとよいでしょう。そして，決めた曜日の決めた時間に，確実に受講する習慣を身につけましょう。学校で授業を受ける時間と同じように，時と場所を変えて『スタディサプリ』を受講する時間，数学Ⅰと本気で向きあう時間，これを確保してください。学校の宿題等，何があっても，決めたペースを守ることを心がけ，できない理由を作らないこと。それを愚直なまでに繰り返すことで，確実な「理解力向上」「実力向上」，そしてそれを実現している自分の姿があることに気付き，それが「自信」につながります。

この「スタンダードレベル数学Ⅰ」は，あくまで数学Ⅰの「入門講座」です。入門は，簡単という意味ではなく，その先に進むために欠かすことのできない「作法」を身に付ける，ということです。受講後は，**「高1・高2 ハイレベル数学Ⅰ」**に進んでみてください。自分の知識がどのように活用できるのか，それを知れば，もっとできることを増やしたい，活用の幅を広げたい，そう思うはずです。それこそが，無限に広がる数学Ⅰの世界への第一歩を踏み出した瞬間です。

第 1 講　式の計算と展開

PART1　整式の整理

例題

(1)　単項式 $2x^2y$ の係数と次数をいえ。また，x に着目したときの係数と次数をいえ。

(2)　多項式 $2x^2+3xy+y^2-4x+5y-1$ を，x について整理せよ。

Point Pickup

練習

(1)　次の単項式で，[　]内の文字に着目したときの係数と次数をいえ。

$-4ax^3y^2$　　　[a]，[x と y]

(2)　多項式 $3x^2-ax-5a+2x$ を，x について整理せよ。

PART2　整式の加法と減法，乗法

例題

(1)　$A=2x^2-xy+5y^2$，$B=-3x^2+4xy+y^2$ のとき，$2A-3B$ を計算せよ。

(2)　次の計算をせよ。

(i)　$3xy\times 4x^3y^2$　　(ii)　$(-2ab^2)^3\times(-a^2b)$　　(iii)　$-4xy(3x-5y^2)$

Point Pickup

練習

(1)　$A=2x^3+4x^2y-7xy^2-8y^3$，$B=-x^3+6x^2y+3xy^2-4y^2$ のとき，$2(A+B)-3A$ を計算せよ。

(2)　次の計算をせよ。

(i)　$2x^2y^3z\times(-5xy^3z^4)$　　(ii)　$(-3ab^2)^2\times(-a^2b)^3$

(iii)　$6mn\left(\dfrac{3}{2}m^2-\dfrac{1}{6}mn-\dfrac{2}{3}n^2\right)$

PART3　展開

例題

次の式を展開せよ。

(1)　$(2x+5)(x+3)$

(2)　$(x-y-2z)(x-y+z)$

(3)　$(a+b-c)^2$

Point Pickup

練習

次の式を展開せよ。

(1)　$(2x+4y)(3x-7y)$

(2)　$(a+b-c-d)(a-b-c+d)$

(3)　$(a-b+2c)^2$

PART4　展開の工夫

例題

次の式を展開せよ。

(1)　$(x+1)(x-1)(x+2)(x+4)$

(2)　$(a+b)^2(a-b)^2$

Point Pickup

練習

次の式を展開せよ。

(1)　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

(2)　$(a+b)^2(a-b)^2(a^2+b^2)^2$

第 1 講　PART1　確認問題

1 次の単項式で，[　] 内の文字に着目したときの係数を①～④のうちから選べ。また，そのときの次数をいえ。

$-3mx^2y^3$　　[m]，[x と y]

[m]　…係数 ア，次数 イ

[x と y]…係数 ウ，次数 エ

①　-3　　②　$-3x^2y^3$

③　$-3m$　　④　$-3mxy^2$

2 次の多項式を y について整理したものを①～④から選べ。

オ

$4x^2+2xy+3y^2-3x+7y+2$

①　$4x^2+(2y-3)x+3y^2+7y+2$

②　$x(4x-3)+y(3y+7)+2(xy+1)$

③　$3y^2+(2x+7)y+4x^2-3x+2$

④　$4x^2+3y^2+2xy-3x+7y+2$

第1講　PART2　確認問題

1　$A=x^3+4x^2y-3xy^2-2y^3$,　$B=-2x^3+5x^2y-7xy^2-2y^3$

のとき，次の計算をせよ。

$3(A-B)+2B=$ [ア] x^3+ [イ] x^2y- [ウ] xy^2- [エ] y^3

2　次の計算をせよ。

$3ab^2c^3\times(-6a^2b^4c)=-$ [オカ] $a^{[キ]}b^{[ク]}c^{[ケ]}$

3　次の計算をせよ。

$(-2xy^3)^2\times(-x^2y)^3=$ [コサ] $x^{[シ]}y^{[ス]}$

4　次の計算をせよ。

$-12xy\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{3}{4}xy+\frac{1}{6}y^2\right)$

$=$ [セソ] x^3y+ [タ] x^2y^2- [チ] xy^3

第 1 講　PART3　確認問題

1　次の式を展開せよ。

$(3x-4y)(2x+5y)$

$=\boxed{\text{ア}}x^2+\boxed{\text{イ}}xy-\boxed{\text{ウエ}}y^2$

2　次の式を展開せよ。

$(a+b+c-d)(a-b+c+d)$

$=a^2-b^2+c^2-d^2+\boxed{\text{オ}}ac+\boxed{\text{カ}}bd$

3　次の式を展開せよ。

$(a+2b+c)^2$

$=a^2+\boxed{\text{キ}}b^2+c^2+4ab+4bc+\boxed{\text{ク}}ca$

第 1 講　PART4　確認問題

1 次の式を展開せよ。

$(x-3)(x-2)(x+3)(x+4)$

$=x^4+2x^3-$ アイ x^2-18x+ ウエ

2 次の式を展開せよ。

$(3a+b)^2(3a-b)^2(9a^2+b^2)^2$

$=$ オカキク a^8- ケコサ $a^4b^4+b^8$

第 2 講　因数分解

PART1　因数分解

例題

次の式を因数分解せよ。

(1)　$8x^3-12x^2y$　　(2)　$(a-b)x+(b-a)y$　　(3)　$9x^2+6x+1$

(4)　$16a^2-49b^2$　　(5)　$x^2-2xy-15y^2$

Point Pickup

練習

次の式を因数分解せよ。

(1) $6ab^2c-2ac^2+3a^2bc$　(2) $a(x-2y)-bx+2by$　(3) $x^2-18xy+81y^2$

(4) $36a^2-9$　(5) $x^2-11ax+24a^2$

PART2　たすきがけによる因数分解

例題

次の式を因数分解せよ。

(1)　$3x^2+7x+2$　　(2)　$2x^2+xy-6y^2$

Point Pickup

練習

次の式を因数分解せよ。

(1)　$2x^2-9x+4$　　(2)　$6a^2-ab-12b^2$

PART3　おき換えによる因数分解

例題

次の式を因数分解せよ。

(1)　$(x-y)^2-3(x-y)+2$　　　(2)　x^4+x^2-2

Point Pickup

練習

次の式を因数分解せよ。

(1)　$2(x-1)^2+5(x-1)-3$　　　(2)　x^4-16y^4

PART4　１ 文字整理による因数分解

例題

次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^2-8y+2xy-16$　　(2)　$x^2-2xy+y^2-x+y-2$

Point Pickup

練習

次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^2+xy+2x+y+1$　　(2)　$2x^2+3xy+y^2-11x-6y+5$

第 2 講　PART1　確認問題

次の式を因数分解せよ。

1　$5xyz^2+3x^2y-2xy^2z$

$=xy(\boxed{ア}z^2+\boxed{イ}x-\boxed{ウ}yz)$

2　$(a-2b)x+ay-2by$

$=(a-\boxed{エ}b)(x+y)$

3　$x^2+12xy+36y^2$

$=(x+\boxed{オ}y)^2$

4　$18x^2-2$

$=2(3x+\boxed{カ})(3x-\boxed{キ})$

5　$x^2-2xy-35y^2$

$=(x+\boxed{ク}y)(x-\boxed{ケ}y)$

第２講　PART2　確認問題

1　次の式を因数分解せよ。

$2x^2+17x+30$

$=(x+\boxed{ア})(\boxed{イ}x+\boxed{ウ})$

2　次の式を因数分解せよ。

$9x^2-6xy-8y^2$

$=(3x-\boxed{エ}y)(3x+\boxed{オ}y)$

第 2 講　PART3　確認問題

次の式を因数分解せよ。

1　$3(a+1)^2-14(a+1)-5$

$=(\boxed{\text{ア}}a+\boxed{\text{イ}})(a-\boxed{\text{ウ}})$

2　$x^4-81y^4=(x+\boxed{\text{エ}}y)(x-\boxed{\text{オ}}y)(x^2+9y^2)$

第 2 講　PART4　確認問題

次の式を因数分解せよ。

1　$x^2+xy-10x-5y+25$

$=(x-\boxed{\text{ア}})(x+y-\boxed{\text{イ}})$

2　$2a^2+ab-b^2-11a+b+12$

$=(\boxed{\text{ウ}}a-b-\boxed{\text{エ}})(a+b-\boxed{\text{オ}})$

第３講　実数，１次不等式

PART1　実数，絶対値

例題

(1)　次の循環小数を分数で表せ。

(i)　$0.\dot{4}$　　(ii)　$0.\dot{2}3\dot{4}$

(2)　次の値を求めよ。

(i)　$|5|$　　(ii)　$|-2|$　　(iii)　$|\sqrt{3}-2|$

Point Pickup

練習

(1)　次の循環小数を分数で表せ。

(i)　$0.\dot{2}4\dot{6}$　　(ii)　$0.1\dot{2}\dot{3}$

(2)　次の値を求めよ。

(i)　$|-8|$　　(ii)　$|\pi-4|$　　(iii)　$x \geqq 3$ のとき $|x-3|$

PART2　根号を含む式の計算

例題

(1)　次の式の分母を有理化せよ。

(i)　$\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$　　(ii)　$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

(2)　$x=\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}$，$y=\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(i)　$x+y$　　(ii)　xy　　(iii)　x^2+y^2

Point Pickup

練習

(1)　次の式の分母を有理化せよ。

(i)　$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$　　(ii)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

(2)　$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(i)　$x+y$　　(ii)　xy　　(iii)　x^2+y^2

PART3　1 次不等式

例題

(1)　次の不等式・連立不等式を解け。

(i)　$3(2x-1)<8x-1$

(ii)　$\begin{cases} 4x+5>25-x \\ \dfrac{3x-1}{2} \leqq \dfrac{2(x+5)}{3}+2 \end{cases}$

(iii)　$-2x+1<3x+4<2(3x-4)$

(2)　$\dfrac{6x+1}{6} \geqq \dfrac{5}{3}x-\dfrac{5}{2}$ を満たす自然数 x をすべて求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　次の不等式・連立不等式を解け。

(i)　$\begin{cases} 5x+2 \geqq 4x-1 \\ 5x-3>8x+5 \end{cases}$　　(ii)　$8(x+2)<5x+1 \leqq 3(x-4)$

(2)　不等式 $\dfrac{x+8}{2}<\dfrac{4}{3}x+1$ を満たす最小の整数 x を求めよ。

PART4　絶対値を含む方程式・不等式

例題

次の方程式・不等式を解け。

(1)　$|x-2|=3$　(2)　$|2x-1|<5$　(3)　$|3x+2|\geqq 4$　(4)　$|x+4|=5x$

Point Pickup

練習

次の方程式・不等式を解け。

(1)　$|x+5|=2$　(2)　$|3x+2|\leqq 3$　(3)　$|x-1|\geqq 2$　(4)　$|x-3|=-2x$

第3講　PART1　確認問題

1　次の循環小数を分数で表せ。$0.\dot{5}=\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$

2　次の循環小数を分数で表せ。$0.\dot{2}1\dot{3}=\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカキ}}}$

3　次の $\boxed{\text{ク}}$ に当てはまるものを①～④から選べ。

$|-7|=\boxed{\text{ク}}$

①　7　　②　-7

③　± 7　　④　14

4　次の $\boxed{\text{ケ}}$ に当てはまるものを①～④から選べ。

$|\pi-5|=\boxed{\text{ケ}}$

①　$\pi-5$　　②　$\pi+5$

③　$-\pi+5$　　④　$-\pi-5$

5　次の $\boxed{\text{コ}}$ に当てはまるものを①～④から選べ。

$x \geqq 4$ のとき　$|x-4|=\boxed{\text{コ}}$

①　$x-4$　　②　$x+4$

③　$-x+4$　　④　$-x-4$

第 3 講　PART2　確認問題

1　次の式の分母を有理化せよ。

$$\frac{8-\sqrt{5}}{8+\sqrt{5}}=\frac{\boxed{アイ}-16\sqrt{5}}{\boxed{ウエ}}$$

2　次の式の分母を有理化せよ。

$$\frac{1}{\sqrt{5}+1+\sqrt{6}}=\frac{\boxed{オ}+\sqrt{5}-\sqrt{30}}{\boxed{カキ}}$$

$x=\dfrac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

3　$x+y=\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケコ}}$

4　$xy=\boxed{サ}$

5　$x^2+y^2=\boxed{シス}$

第３講　PART3　確認問題

1　次の連立不等式を解け。

$$\begin{cases} 4x+3 \geqq 3x-1 \\ 4x-2 > 7x+5 \end{cases}$$

$-\boxed{ア} \leqq x < -\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$

2　次の不等式を解け。

$5(x+1) < 3x-1 \leqq 2(x+3)$

$x < -\boxed{エ}$

3　不等式 $\dfrac{x+2}{3} < \dfrac{3}{4}x-1$ を満たす最小の整数 x は $\boxed{オ}$ である。

第 3 講　PART4　確認問題

1 次の方程式を解け。

$|x+2|=3$

$x=$ ア , イウ

2 次の不等式を解け。

$|3x-1| \leqq 7$

エオ $\leqq x \leqq \dfrac{\text{カ}}{\text{キ}}$

3 次の不等式を解け。

$|x-6| \geqq 4$

$x \leqq$ ク , ケコ $\leqq x$

4 次の方程式を解け。

$|x+1|=-3x$

$x=-\dfrac{\text{サ}}{\text{シ}}$

第４講　集合，命題と条件

PART1　集合

例題

全体集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ の部分集合 A，B を

$$A=\{1,\ 3,\ 6,\ 7,\ 10\},\quad B=\{2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 9\}$$

とする。このとき，次の集合を求めよ。

(1)　$A\cap B$　　(2)　$A\cup B$　　(3)　$\overline{A}$　　(4)　$\overline{A}\cup\overline{B}$

Point Pickup

練習

1 から 12 までの自然数全体の集合 U を全体集合とし，その部分集合のうち 2 の倍数全体の集合を A，3 の倍数全体の集合を B とする。このとき，次の集合を求めよ。

(1)　$A \cap B$　　(2)　$A \cup B$　　(3)　$\overline{A} \cap B$　　(4)　$\overline{A} \cap \overline{B}$

PART2　命題と条件

例題

x，y を実数とする。次の命題の真偽を調べよ。偽ならば反例を１つあげよ。

(1)　$x=1$ ならば $x^2=1$

(2)　$x^2=1$ ならば $x=1$

(3)　$x+y>0$ かつ $xy>0$ ならば $x>0$ かつ $y>0$

(4)　$x \geqq 1$ ならば $x>1$

Point Pickup

練習

x，y を実数とする。次の命題の真偽を調べよ。偽ならば反例を 1 つあげよ。

(1)　$xy=0$ ならば $x=0$ である。

(2)　$-2<x<3$ ならば $-2 \leqq x<5$ である。

(3)　x を整数とするとき，x が 8 の倍数ならば，x は 2 の倍数である。

(4)　$x^2=2x$ ならば $x=2$ である。

PART3　必要条件と十分条件，条件の否定

例題

(1)　次の条件 p は条件 q であるための何条件であるか。最も適するものを(ア)～(エ)から選べ。ただし，x，y は実数とする。

(i)　p：$x=3$　　q：$x^2-4x+3=0$

(ii)　p：△ABC が直角三角形　　q：$\angle A=90^\circ$

(iii)　p：$xy=0$　　q：x，y のうち少なくとも１つは０

(iv)　p：$x>0$　　q：$|x|>1$

(ア)　必要十分条件である　　(イ)　必要条件であるが十分条件ではない

(ウ)　十分条件であるが必要条件ではない　　(エ)　必要条件でも十分条件でもない

(2)　次の条件の否定を求めよ。ただし x，y は実数，n は自然数とする。

(i)　$x=1$　　(ii)　$1<x\leqq 2$

(iii)　$x>0$ または $y\leqq 2$　　(iv)　n は奇数または５の倍数

Point Pickup

練習

(1)　次の条件 p は条件 q であるための何条件であるか。最も適するものを(ア)～(エ)から選べ。ただし，x，y は実数とする。

(i)　p：$x \neq 0$　　q：$x^2-3x+2=0$

(ii)　p：四角形 ABCD が正方形　　q：四角形 ABCD が長方形

(iii)　p：$x=1$　　q：$xy=1$

(iv)　p：x が 4 の倍数 かつ 6 の倍数　　q：x が 24 の倍数

(ア)　必要十分条件である　　(イ)　必要条件であるが十分条件ではない

(ウ)　十分条件であるが必要条件ではない　　(エ)　必要条件でも十分条件でもない

(2)　次の条件の否定を求めよ。ただし x，y は実数，m，n は自然数とする。

(i)　$x \leqq 5$ または $y=2$　　(ii)　m，n はともに 3 の倍数

PART4　逆・裏・対偶，命題の証明

例題

(1)　x，y は実数とする。次の命題の逆・裏・対偶を述べ，その真偽を調べよ。

$$x+y \neq 4 \quad \Rightarrow \quad x \neq 1 \text{ または } y \neq 3$$

(2)　n を整数とする。n^2 が偶数ならば，n は偶数であることを証明せよ。

(3)　$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，$\sqrt{2}-1$ が無理数であることを証明せよ。

Point Pickup

練習

(1)　x，y は実数とする。次の命題の逆・裏・対偶を述べ，その真偽を調べよ。

xy が無理数　$\Rightarrow$　x，y の少なくとも一方は無理数

(2)　n を整数とする。n^2 が 7 の倍数でないならば，n は 7 の倍数でないことを証明せよ。

(3)　$\sqrt{6}$ が無理数であることを用いて，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。

第 4 講　PART1　確認問題

1 から 18 までの自然数全体の集合 U を全体集合とし，その部分集合のうち 2 の倍数全体の集合を A，3 の倍数全体の集合を B とする。このとき，次の集合を求めよ。

1 $A \cap B = \{$ [ア], [イウ], [エオ] $\}$

ただし，[イウ] $<$ [エオ] とする。

2 $A \cup B = \{2,\ 3,\ 4,$ [カ], $8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,$ [キク] $\}$

3 $\overline{A} \cap B = \{$ [ケ], [コ], [サシ] $\}$

ただし，[ケ] $<$ [コ] とする。

4 $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1,\ 5,$ [ス], [セソ], $13,\ 17\}$

第4講　PART2　確認問題

1　x を実数とする。次の ア に当てはまるものを①～④から選べ。

命題「$x^2=9$ ならば $x=3$　である」は ア

①　真

②　偽(反例　$x=-3$)

③　偽(反例　$x=1$)

④　偽(反例　$x=9$)

2　x を実数とする。次の イ に当てはまるものを①～④から選べ。

命題「$-1<x<1$ ならば $-1\leqq x<1$ である」は イ

①　真

②　偽(反例　$x=-1$)

③　偽(反例　$x=-\frac{1}{2}$)

④　偽(反例　$x=\frac{1}{2}$)

3　次の ウ に当てはまるものを①～④から選べ。

x を整数とするとき，命題「x が 6 の倍数ならば，x は 3 の倍数である」は ウ

①　真

②　偽(反例　$x=6$)

③　偽(反例　$x=12$)

④　偽(反例　$x=18$)

4 xを実数とする。次の $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを①～④から選べ。

命題「$x^2 = 3x$ ならば $x = 0$ である」は $\boxed{\text{エ}}$

① 真

② 偽（反例　$x = -3$）

③ 偽（反例　$x = 1$）

④ 偽（反例　$x = 3$）

第４講　PART3　確認問題

1　次の ア に最も適するものを①～④から選べ。ただし，x は実数とする。

下の条件 p は条件 q であるための ア 。

p：$x=\pm5$　　　q：$x^2-25=0$

①　必要十分条件である
②　必要条件であるが十分条件ではない
③　十分条件であるが必要条件ではない
④　必要条件でも十分条件でもない

2　次の イ に最も適するものを①～④から選べ。

下の条件 p は条件 q であるための イ 。

p：四角形 ABCD がひし形
q：四角形 ABCD が平行四辺形

①　必要十分条件である
②　必要条件であるが十分条件ではない
③　十分条件であるが必要条件ではない
④　必要条件でも十分条件でもない

3　次の ウ に最も適するものを①～④から選べ。ただし, x, y は実数とする。

下の条件 p は条件 q であるための ウ 。

p：$x=-1$　　　q：$xy=-1$

①　必要十分条件である
②　必要条件であるが十分条件ではない
③　十分条件であるが必要条件ではない
④　必要条件でも十分条件でもない

4 次の［エ］に最も適するものを①～④から選べ。ただし，x は自然数とする。

下の条件 p は条件 q であるための［エ］。

p：x が 2 の倍数　かつ　3 の倍数

q：x が 12 の倍数

① 必要十分条件である

② 必要条件であるが十分条件ではない

③ 十分条件であるが必要条件ではない

④ 必要条件でも十分条件でもない

5 次の［オ］に最も適するものを①～④から選べ。ただし，x，y は実数とする。

下の条件の否定は［オ］。

$x \geqq -2$　かつ　$y > 3$

① $x \leqq -2$　かつ　$y < 3$

② $x < -2$　かつ　$y \leqq 3$

③ $x \leqq -2$　または　$y < 3$

④ $x < -2$　または　$y \leqq 3$

6 次の［カ］に最も適するものを①～④から選べ。ただし，m，n は自然数とする。

下の条件の否定は［カ］。

m，n の少なくとも一方は 5 の倍数

① m，n はともに 5 の倍数

② m，n はともに 5 の倍数でない

③ m，n の少なくとも一方は 5 の倍数

④ m，n の少なくとも一方は 5 の倍数でない

第４講　PART4　確認問題

1　次の [ア] に当てはまる命題とその真偽を①～④から選べ。

ただし，x は実数とする。

命題「$x^2 \geqq 9 \Longrightarrow x \geqq 3$」の逆は，[ア]

① 「$x^2 < 9 \Longrightarrow x < 3$」　これは真

② 「$x \geqq 3 \Longrightarrow x^2 \geqq 9$」　これは真

③ 「$x^2 < 9 \Longrightarrow x < 3$」　これは偽

④ 「$x \geqq 3 \Longrightarrow x^2 \geqq 9$」　これは偽

2　次の [イ] に当てはまる命題とその真偽を①～④から選べ。

ただし，x，y は実数とする。

命題「$x+y=4 \Longrightarrow x \leqq 2$　または　$y \leqq 2$」の裏は，

[イ]

① 「$x+y \neq 4 \Longrightarrow x > 2$　かつ　$y > 2$」
これは真

② 「$x \leqq 2$　または　$y \leqq 2 \Longrightarrow x+y=4$」
これは真

③ 「$x+y \neq 4 \Longrightarrow x > 2$　かつ　$y > 2$」
これは偽

④ 「$x \leqq 2$　または　$y \leqq 2 \Longrightarrow x+y=4$」
これは偽

3　次の [ウ] に当てはまる命題とその真偽を①～④から選べ。

ただし，n は自然数とする。

命題「n は6の倍数でない $\Longrightarrow$ n は3の倍数でない」

の対偶は，[ウ]

① 「n は3の倍数 $\Longrightarrow$ n は6の倍数」

これは真

② 「n は6の倍数 $\Longrightarrow$ n は3の倍数」

これは真

③ 「n は3の倍数 $\Longrightarrow$ n は6の倍数」

これは偽

④ 「n は6の倍数 $\Longrightarrow$ n は3の倍数」

これは偽

4　n を自然数とする。n^2 が3の倍数でないならば，n は3の倍数でないことを証明せよ。

【証明】

この命題の [エ] は「n が3の倍数ならば，n^2 は3の倍数である」。これを示す。

n が3の倍数のとき，n は整数 k を用いて

$n=$ [オ] k

と表される。このとき，

$n^2=($ [オ] $k)^2=$ [カ] $k^2=$ [キ] $\cdot 3k^2$

$3k^2$ は整数であるから，n^2 は [キ] の倍数である。

よって，[エ] が [ク] より，もとの命題も [ク] である。

[エ]，[ク] は次の①～⑤のうちから選べ。

① 逆　　② 裏　　③ 対偶

④ 真　　⑤ 偽

5 $\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，$\sqrt{3}+\sqrt{6}$ が無理数であることを証明せよ。

【証明】

$\sqrt{3}+\sqrt{6}$ が無理数でないと仮定すると，$\sqrt{3}+\sqrt{6}$ は $\boxed{\text{ケ}}$ であるから，

$$\sqrt{3}+\sqrt{6}=r \quad (r\text{ は有理数})$$

とおくと

$$(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2=r^2$$

$$9+6\sqrt{2}=r^2 \qquad \sqrt{\boxed{\text{コ}}}=\frac{r^2-9}{6}$$

r は有理数より，$\dfrac{r^2-9}{6}$ も有理数である。

よって，$\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって，$\sqrt{3}+\sqrt{6}$ は $\boxed{\text{シ}}$ である。

$\boxed{\text{ケ}}$，$\boxed{\text{シ}}$ は次の①，②のうちから選べ。

①　有理数　　②　無理数

第 5 講　2次関数とグラフ

PART1　関数とグラフ，1次関数の最大値・最小値

例題

(1)　関数 $f(x)=3x-1$ について，$f(1)$，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f(a+1)$ の値を求めよ。

(2)　関数 $y=2x+3$ $(-1\leqq x<1)$ のグラフをかき，値域を求めよ。また，最大値，最小値があればそれを求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　関数 $f(x)=2x^2-3x+1$ について，$f(0)$，$f(-2)$，$f(a-2)$ の値を求めよ。

(2)　関数 $y=-\dfrac{1}{2}x-1$（$-2\leqq x<2$）のグラフをかき，値域を求めよ。また，最大値，最小値があればそれを求めよ。

PART2　$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

例題

次の２次関数のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=3(x-1)^2+2$　　(2)　$y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+3$

Point Pickup

練習

次の２次関数のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=2(x+2)^2-1$

(2)　$y=-(x-1)^2-1$

(3)　$y=x^2+1$

(4)　$y=-\frac{1}{3}(x+2)^2$

PART3　平方完成と $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

例題

次の２次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。

(1)　$y=x^2+4x+2$　　　(2)　$y=-2x^2+2x+1$

Point Pickup

練習

次の２次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。

(1)　$y=x^2+x+1$

(2)　$y=-3x^2+6x-3$

(3)　$y=2x^2-3x+4$

(4)　$y=-\frac{1}{3}x^2-x-6$

PART4　放物線の平行移動・対称移動

例題

(1)　放物線 $y=3x^2+6x-2$ を，x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動した放物線の方程式を求めよ。

(2)　放物線 $y=x^2-2x+3$ を，x 軸，y 軸，原点に対してそれぞれ対称移動した放物線の方程式を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　放物線 $y=2x^2-2x-1$ を平行移動して放物線 $y=2x^2-8x+4$ に重ねるには，どのように平行移動すればよいか。

(2)　放物線 $y=-x^2-2x$ を，x 軸，y 軸，原点に対してそれぞれ対称移動した放物線の方程式を求めよ。

第 5 講　PART1　確認問題

1　２次関数 $f(x)=3x^2-2x+1$ について，$f(0)$，$f(-2)$，$f(a-2)$ の値を求めよ。

$f(0)=$ [ア]

$f(-2)=$ [イウ]

$f(a-2)=$ [エ] a^2- [オカ] $a+$ [キク]

2　関数 $y=\dfrac{1}{3}x-2$ $(-6\leqq x<6)$の値域を求めよ。また，最大値，最小値があれば①～③からそれぞれ選べ。ない場合は④を選べ。

値域 [ケコ] $\leqq y<$ [サ]

最大値 [シ]　　最小値 [ス]

①　-6　　②　-4

③　0　　④　なし

第 5 講　PART2　確認問題

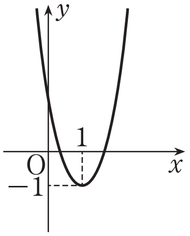
次の２次関数のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフを①～④から選べ。

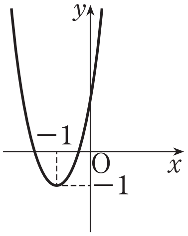
1　$y=3(x+1)^2-1$

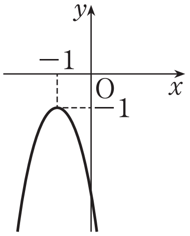
軸　直線 $x=$ アイ

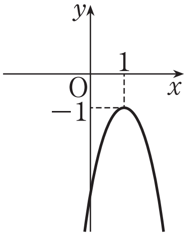
頂点　点（ ウエ ， オカ ）

グラフ キ

①


②


③


④


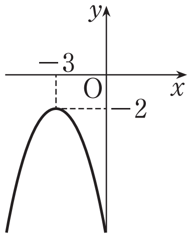
2 $y=-(x-3)^2-2$

軸　直線 $x=$ ク

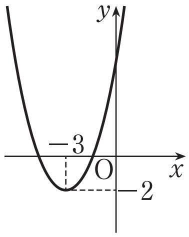
頂点　点(ケ , コサ)

グラフ シ

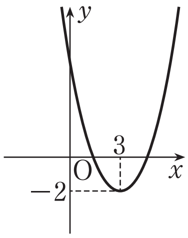
①



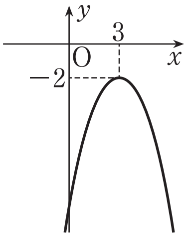
②



③



④



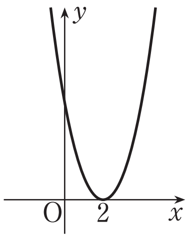
3 $y=x^2-2$

軸　直線 $x=$ [ス]

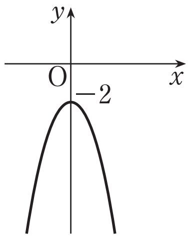
頂点　点([セ] , [ソタ])

グラフ [チ]

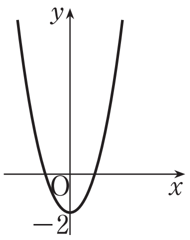
①



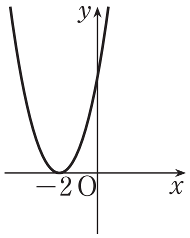
②



③



④



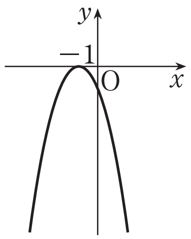
4 $y=-\dfrac{1}{2}(x+1)^2$

軸　直線 $x=$ ツテ

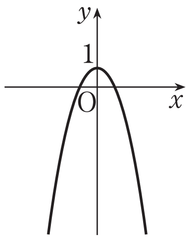
頂点　点 (トナ , ニ)

グラフ ヌ

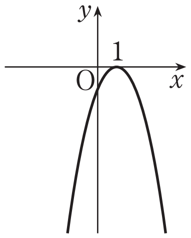
①



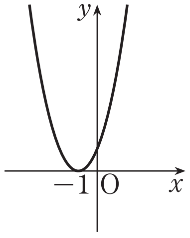
②



③



④



第 5 講　PART3　確認問題

次の２次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。

1　$y=x^2-x+2$

軸　直線 $x=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

頂点　点 $\left(\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}},\ \dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\right)$

2　$y=-2x^2+4x-2$

軸　直線 $x=\boxed{キ}$

頂点　点 $(\boxed{ク},\ \boxed{ケ})$

3　$y=3x^2+4x+2$

軸　直線 $x=-\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$

頂点　点 $\left(-\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}},\ \dfrac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}\right)$

4　$y=-\dfrac{1}{2}x^2-3x-7$

軸　直線 $x=-$ [タ]

頂点　点 $\left(-\boxed{チ},\ -\dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}\right)$

第 5 講　PART4　確認問題

1　放物線 $y=2x^2-4x-1$ を平行移動して放物線

$y=2x^2+2x+3$ に重ねるには，

x 軸方向に $-\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$y$ 軸方向に $\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}$ だけ平行移動す

ればよい。

2　放物線 $y=x^2-6x+5$ を，x 軸，y 軸，原点に関してそれぞれ対称移動した放物線の方程式を①～④からそれぞれ選べ。

x 軸に関して対称移動：$\boxed{カ}$

y 軸に関して対称移動：$\boxed{キ}$

原点に関して対称移動：$\boxed{ク}$

①　$y=x^2+6x+5$　　②　$y=x^2+6x+13$

③　$y=-x^2+6x-5$　　④　$y=-x^2-6x-5$

第 6 講　2 次関数の最大・最小，2 次関数の決定

PART1　2 次関数の最大・最小

例題

関数 $f(x)=x^2+2x-1$ について，次の定義域における最大値，最小値を求めよ。

(1)　$-4 \leqq x \leqq -2$　　(2)　$-3 \leqq x \leqq 0$　　(3)　$-2 \leqq x \leqq 1$　　(4)　$0 \leqq x \leqq 2$

Point Pickup

練習

関数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{3}{2}$ について，次の定義域における最大値，最小値を求めよ。

(1)　$4 \leqq x \leqq 5$　(2)　$1 \leqq x \leqq 4$　(3)　$0 \leqq x \leqq 3$　(4)　$-1 \leqq x \leqq 0$

PART2　２次関数の最大・最小（定義域の変化）

例題

$a>0$ とする。定義域が $0 \leqq x \leqq a$ である関数 $y=x^2-4x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　　(2)　最大値を求めよ。

Point Pickup

練習

$a>1$ とする。定義域が $1 \leqq x \leqq a$ である関数 $y=x^2-6x-5$ について, 次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

PART3　2 次関数の最大・最小(軸の移動)

例題

a は定数とする。定義域が $0 \leqq x \leqq 2$ である関数 $f(x)=x^2-2ax+1$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

Point Pickup

練習

a は定数とする。定義域が $0 \leqq x \leqq 4$ である関数 $f(x)=-2x^2+4ax+4a+1$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。

(2)　最大値を求めよ。

PART4　2次関数の決定

例題

次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

(1)　頂点が点 (2, 1) で，点 (1, 4) を通る。

(2)　放物線 $y=-2x^2$ を平行移動したもので，2点 (1, 1)，(2, 3) を通る。

(3)　3点 (−1, −3)，(1, 5)，(2, 3) を通る。

Point Pickup

練習

次の条件を満たす放物線をグラフにもつ２次関数を求めよ。

⑴　$x=-2$ のとき最大値５をとり，点 $(2,\ -11)$ を通る。

⑵　軸が直線 $x=-1$ で，２点 $(-3,\ 3)$，$(0,\ -3)$ を通る。

⑶　３点 $(1,\ 0)$，$(-2,\ 0)$，$(-3,\ -2)$ を通る。

第6講　PART1　確認問題

1 関数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{4}$ について，定義域が $2 \leqq x \leqq 4$ のとき，

最大値は $-\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，最小値は $-\frac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}$ である。

2 関数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{4}$ について，定義域が $0 \leqq x \leqq 3$ のとき，

最大値は $\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$，最小値は $-\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$ である。

3 関数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{4}$ について，定義域が $-1 \leqq x \leqq 2$ のとき，

最大値は $\frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$，最小値は $-\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ である。

4 関数 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{4}$ について，定義域が $-1 \leqq x \leqq 0$ のとき，

最大値は $-\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$，最小値は $-\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$ である。

第6講　PART2　確認問題

$a>1$ とする。定義域が $1 \leqq x \leqq a$ である関数 $y=-x^2+6x-3$ について，次の問いに答えよ。

1 最大値を求めよ。答えは，下の①～⑧のうちから選べ。

$1<a<$ [ア] のとき

$x=$ [イ] で，最大値 [ウ] をとる。

[ア] $\leqq a$ のとき

$x=$ [エ] で，最大値 [オ] をとる。

① 1　② 2　③ 3　④ -3　⑤ 5　⑥ 6

⑦ a　⑧ $-a^2+6a-3$

2 最小値を求めよ。答えは，下の①～⑧のうちから選べ。

$1<a<$ [カ] のとき

$x=$ [キ] で，最小値 [ク] をとる。

$a=$ [カ] のとき

$x=$ [ケ]，[コ] で，最小値 [サ] をとる。

[カ] $<a$ のとき

$x=$ [シ] で，最小値 [ス] をとる。

ただし，[ケ] < [コ] とする。

① 1　② 2　③ 3　④ -3　⑤ 5　⑥ 6

⑦ a　⑧ $-a^2+6a-3$

第 6 講　PART3　確認問題

1 a は定数とする。定義域が $0 \leqq x \leqq 6$ である関数
$f(x) = -3x^2 + 6ax + 2a + 1$ の最小値を求めよ。ただし，
答えは下の①から⑦のうちから最適なものを選べ。

$a <$ [ア] のとき　最小値 [イ]

$a =$ [ア] のとき　最小値 [ウ]

[ア] $< a$ のとき　最小値 [エ]

① 1　② 3　③ 7　④ $2a+1$
⑤ $38a-107$　⑥ $3a^2+2a+1$　⑦ 0

2 a は定数とする。定義域が $0 \leqq x \leqq 6$ である関数
$f(x) = -3x^2 + 6ax + 2a + 1$ の最大値を求めよ。ただし，
答えは下の①から⑦のうちから最適なものを選べ。

$a <$ [オ] のとき　最大値 [カ]

[オ] $\leqq a \leqq$ [キ] のとき　最大値 [ク]

[キ] $< a$ のとき　最大値 [ケ]

① 1　② 6　③ 7　④ $2a+1$
⑤ $38a-107$　⑥ $3a^2+2a+1$　⑦ 0

第６講　PART4　確認問題

1　$x=-1$ のとき最大値 4 をとり，グラフが点 $(2,\ -5)$ を通る 2 次関数の式は

$$y=\boxed{\text{ア}}\left(x+\boxed{\text{イ}}\right)^2+\boxed{\text{ウ}}$$

2　グラフの軸が直線 $x=2$ で，グラフが 2 点 $(-1,\ 28)$，$(1,\ 4)$ を通る 2 次関数の式は

$$y=\boxed{\text{エ}}\left(x-\boxed{\text{オ}}\right)^2+\boxed{\text{カ}}$$

3　グラフが 3 点 $(1,\ 6)$，$(-2,\ 21)$，$(2,\ 9)$ を通る 2 次関数の式は

$$y=\boxed{\text{キ}}x^2-\boxed{\text{ク}}x+\boxed{\text{ケ}}$$

第 7 講　２次方程式・２次不等式

PART1　２次方程式の解法，実数解の個数

例題

(1)　次の２次方程式の実数解の個数を調べよ。また，実数解をもつ場合はその実数解を求めよ。

(i)　$x^2+3x+1=0$　　(ii)　$9x^2-6x+1=0$　　(iii)　$3x^2-5x+3=0$

(2)　２次方程式 $2x^2-x-m+2=0$ が実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　次の２次方程式の実数解の個数を調べよ。また，実数解をもつ場合はその実数解を求めよ。

(i)　$x^2-7x+8=0$　　(ii)　$-x^2+x-4=0$　　(iii)　$3x^2-2\sqrt{3}\,x+1=0$

(2)　２次方程式 $4x^2-(m+2)x+m-1=0$ が重解をもつとき，定数 m の値を求めよ。また，そのときの重解を求めよ。

PART2　２次関数のグラフと x 軸の共有点

例題

(1)　次の２次関数のグラフと x 軸との位置関係を求めよ。また，共有点をもつ場合は，その座標を求めよ。

(i)　$y=x^2-4x+3$　　(ii)　$y=-4x^2-12x-9$　　(iii)　$y=x^2+3x+3$

(2)　２次関数 $y=x^2+4x+k$ のグラフと x 軸との共有点の個数は，定数 k の値によってどのように変わるか。

Point Pickup

練習

(1) 次の2次関数のグラフと x 軸との位置関係を求めよ。また，共有点をもつ場合は，その座標を求めよ。

(i) $y=x^2-x-4$　　(ii) $y=x^2+5x+7$　　(iii) $y=-\frac{1}{2}x^2+4x-8$

(2) 2次関数 $y=-x^2+2x+k+3$ のグラフと x 軸の位置関係が次のようになるとき，k のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。

(i) 共有点をもたない　　(ii) 共有点をもつ

PART3　2 次不等式と 2 次関数のグラフ

例題

次の 2 次不等式を解け。

(1)　$x^2+x-2>0$

(2)　$x^2-3x-2\geqq 0$

(3)　$3x^2-10x+3<0$

(4)　$-x^2+x+1\geqq 0$

Point Pickup

練習

次の 2 次不等式を解け。

(1)　$x^2-7x+10>0$

(2)　$4x^2-5x-3<0$

(3)　$-x^2+4x+7\geqq 0$

(4)　$x^2\geqq 8$

PART4　２次不等式（x 軸と接する，共有点をもたない）

例題

(1)　次の２次不等式を解け。

(i)　$(x-2)^2>0$　　(ii)　$(x-2)^2 \geqq 0$

(iii)　$(x-2)^2<0$　　(iv)　$(x-2)^2 \leqq 0$

(2)　次の２次不等式を解け。

(i)　$x^2-2x+3<0$　　(ii)　$2x^2+5x+4 \geqq 0$

Point Pickup

練習

次の2次不等式を解け。

(1)　$4x^2+4x+1>0$

(2)　$-x^2+6x-9\geqq 0$

(3)　$x^2-2x+5>0$

(4)　$-x^2-x-1\geqq 0$

第７講　PART1　確認問題

1　次の２次方程式の実数解の個数と，実数解をもつ場合の実数解の組合わせとして適当なものを①～④から選べ。［ア］

$x^2-4x-1=0$

① 実数解の個数　２個，実数解　$x=2\pm\sqrt{5}$

② 実数解の個数　１個，実数解　$x=2+\sqrt{5}$

③ 実数解の個数　０個

④ 実数解の個数　２個，実数解　$x=-2\pm\sqrt{5}$

2　次の２次方程式の実数解の個数と，実数解をもつ場合の実数解の組合わせとして適当なものを①～④から選べ。［イ］

$-x^2+x-3=0$

① 実数解の個数　２個，
実数解　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$

② 実数解の個数　１個，
実数解　$x=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$

③ 実数解の個数　０個

④ 実数解の個数　１個，
実数解　$x=-1+\sqrt{11}$

3 次の 2 次方程式の実数解の個数と，実数解をもつ場合の実数解の組合わせとして適当なものを①～④から選べ。 ウ

$4x^2+12x+9=0$

① 実数解の個数　2 個，

実数解　$x=\dfrac{-6\pm3\sqrt{3}}{4}$

② 実数解の個数　1 個，実数解　$x=\dfrac{3}{2}$

③ 実数解の個数　0 個

④ 実数解の個数　1 個，実数解　$x=-\dfrac{3}{2}$

4 次の 2 次方程式が重解をもつとき，定数 m の値を求めよ。また，そのときの重解を求めよ。

$4x^2-(m+1)x+m-2=0$

$m=$ エ のとき，重解 $x=\dfrac{\text{オ}}{\text{カ}}$

$m=$ キク のとき，重解 $x=\dfrac{\text{ケ}}{\text{コ}}$

第７講　PART2　確認問題

1　次の２次関数のグラフと x 軸との位置関係と，共有点をもつ場合の座標の組合わせとして適当なものを①～④から選べ。［ア］

$y=x^2-5x+3$

①　x 軸と異なる２点で交わり，共有点の座標は，
$\left(\dfrac{5+\sqrt{13}}{2},\ 0\right)$，$\left(\dfrac{5-\sqrt{13}}{2},\ 0\right)$

②　x 軸と接し，共有点の座標は，$(-1,\ 0)$

③　x 軸と共有点をもたない

④　x 軸と異なる２点で交わり，共有点の座標は，
$(1,\ 0)$，$(-3,\ 0)$

2　次の２次関数のグラフと x 軸との位置関係と，共有点をもつ場合の座標の組合わせとして適当なものを①～④から選べ。［イ］

$y=x^2-4x+12$

①　x 軸と異なる２点で交わり，共有点の座標は，
$(2+\sqrt{3},\ 0)$，$(2-\sqrt{3},\ 0)$

②　x 軸と接し，共有点の座標は，$(2,\ 0)$

③　x 軸と共有点をもたない

④　x 軸と異なる２点で交わり，共有点の座標は，
$(-2,\ 0)$，$(6,\ 0)$

3 次の2次関数のグラフと x 軸との位置関係と，共有点をもつ場合の座標の組合わせとして適当なものを①～④から選べ。 ウ

$$y=\frac{1}{3}x^2+4x+12$$

① x 軸と異なる2点で交わり，共有点の座標は，$(6,\ 0)$，$(-6,\ 0)$

② x 軸と接し，共有点の座標は，$(-6,\ 0)$

③ x 軸と共有点をもたない

④ x 軸と接し，共有点の座標は，$\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$

4 2次関数 $y=-x^2+3x+k+4$ のグラフと x 軸が共有点をもたないときの，k のとりうる値の範囲を①～③から選べ。

エ

① $k<-\frac{25}{4}$　　② $k=-\frac{25}{4}$

③ $k>-\frac{25}{4}$

5 2次関数 $y=-x^2+3x+k+4$ のグラフと x 軸が共有点をもつときの，k のとりうる値の範囲を①～③から選べ。 オ

① $k\leqq-\frac{25}{4}$　　② $k=-\frac{25}{4}$

③ $k\geqq-\frac{25}{4}$

第7講　PART3　確認問題

1　2次不等式 $x^2-8x+15>0$ を解け。

$x<$ ア ,　イ $<x$

2　2次不等式 $4x^2+3x-2<0$ を解け。

$\dfrac{-\boxed{ウ}-\sqrt{\boxed{エオ}}}{\boxed{カ}}<x<\dfrac{-\boxed{ウ}+\sqrt{\boxed{エオ}}}{\boxed{カ}}$

3　2次不等式 $-x^2-6x-2\geqq 0$ を解け。

$-\boxed{キ}-\sqrt{\boxed{ク}}\leqq x\leqq -\boxed{キ}+\sqrt{\boxed{ク}}$

4　2次不等式 $x^2\geqq 12$ を解け。

$x\leqq -\boxed{ケ}\sqrt{\boxed{コ}}$,　$\boxed{ケ}\sqrt{\boxed{コ}}\leqq x$

第 7 講　PART4　確認問題

1　次の 2 次不等式の解を①～⑥から選べ。 ア

$9x^2-6x+1>0$

① $x=-\frac{1}{3}$ 以外のすべての実数

② $x=\frac{1}{3}$ 以外のすべての実数

③ $x=-4$

④ $x=4$

⑤ すべての実数

⑥ 解はない

2　次の 2 次不等式の解を①～⑥から選べ。 イ

$-x^2+8x-16\geqq 0$

① $x=-\frac{1}{3}$ 以外のすべての実数

② $x=\frac{1}{3}$ 以外のすべての実数

③ $x=-4$

④ $x=4$

⑤ すべての実数

⑥ 解はない

3 次の2次不等式の解を①～⑥から選べ。 ウ

$-x^2+3x-6 \geqq 0$

① $x=-\dfrac{3}{2}$ 以外のすべての実数

② $x=\dfrac{3}{2}$ 以外のすべての実数

③ $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{15}}{2}$

④ $x=\dfrac{3\pm\sqrt{15}}{2}$

⑤ すべての実数

⑥ 解はない

4 次の2次不等式の解を①～⑥から選べ。 エ

$x^2+5x+7>0$

① $x=-\dfrac{5}{2}$ 以外のすべての実数

② $x=\dfrac{5}{2}$ 以外のすべての実数

③ $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{3}}{2}$

④ $x=\dfrac{5\pm\sqrt{3}}{2}$

⑤ すべての実数

⑥ 解はない

【MEMO】

第 8 講　２次不等式の利用

PART1　２次関数のグラフと２次方程式・２次不等式

例題

(1)　２次関数 $y=x^2+mx+m$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(2)　すべての実数 x について $x^2-(k-1)x+3>0$ が成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　2次関数 $y=-x^2+(m-1)x-m+1$ のグラフが次の条件を満たすように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(i)　x 軸と共有点をもつ　　(ii)　x 軸と共有点をもたない

(2)　すべての実数 x について $-x^2+2ax-a-2<0$ が成り立つように，定数 a の値の範囲を定めよ。

PART2　連立不等式

例題

2 つの 2 次方程式 $x^2-x+a=0$，$x^2+2ax-3a+4=0$ について，次の条件を満たす a の値の範囲を求めよ。

(1)　ともに異なる 2 つの実数解をもつ　(2)　少なくとも一方が異なる 2 つの実数解をもつ

Point Pickup

練習

2つの2次方程式 $x^2+(a+1)x-1+a^2=0$, $x^2-(1-a)x+(a+1)^2=0$ について，次の条件を満たす a の値の範囲を求めよ。

(1)　ともに実数解をもつ

(2)　一方のみが実数解をもつ

PART3　2 次関数のグラフと x 軸の共有点の位置

例題

2 次関数 $y=2x^2-3x-a$ のグラフが x 軸の正の部分と負の部分で交わるように，定数 a の値の範囲を定めよ。

Point Pickup

練習

2 次関数 $y=x^2-mx+m+3$ のグラフが x 軸の $x>-2$ の部分と $x<-2$ の部分で交わるような定数 m の値の範囲を求めよ。

PART4　２次方程式の解の存在範囲

例題

２次方程式 $x^2+2(a-2)x+a=0$ が異なる２つの正の解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

練習

2次方程式 $x^2+2ax+2a+3=0$ が2より小さい異なる2つの解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

第 8 講　PART1　確認問題

1　2 次関数 $y=-x^2+(m+2)x-3m+2$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

$m \leqq$ [ア]，[イ] $\leqq m$

2　2 次関数 $y=-x^2+(m+2)x-3m+2$ のグラフが x 軸と共有点をもたないとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

[ウ] $< m <$ [エ]

3　2 次不等式 $x^2+ax+2>0$ がすべての実数 x で成り立つように定数 a の範囲を定めよ。

[オカ] $\sqrt{[キ]} < a <$ [ク] $\sqrt{[ケ]}$

第 8 講　PART2　確認問題

2 つの 2 次方程式 $x^2+(a+5)x+3+a^2=0$ と

$x^2-(3-a)x+(a+1)^2=0$ について，次の条件を満たす a の値の範囲を求めよ。

1　ともに実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

$$\boxed{アイ} \leqq a \leqq \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$$

2　一方のみが実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

$$\boxed{オカ} \leqq a < \boxed{キク},\quad \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}} < a \leqq \frac{\boxed{サシ}}{\boxed{ス}}$$

第 8 講　PART3　確認問題

1　2 次関数 $y=x^2+2mx+m-2$ のグラフが x 軸の $x>-1$ の部分と $x<-1$ の部分で交わるような定数 m の値の範囲を求めよ。

$m>$ [アイ]

第 8 講　PART4　確認問題

1　2次方程式 $x^2+2ax+4a-3=0$ が1より小さい異なる2つの解をもつとき，定数 a の値の範囲は

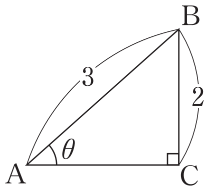
$$\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}<a<\boxed{ウ},\quad \boxed{エ}<a$$

第 9 講　鋭角の三角比

PART1　直角三角形と三角比

例題

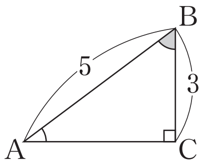
右の図において，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ。



Point Pickup

練習

右の図において，次の値を求めよ。



(1)　$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$

(2)　$\sin B$，$\cos B$，$\tan B$

PART2　有名角の三角比，三角比の表

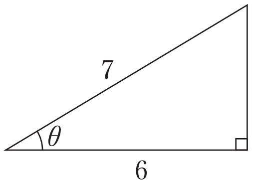
例題

(1)　次の表の空欄に適する値を入れよ。

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
30°			
45°			
60°			

(2)　右の図において，θ のおよその大きさを，下の三角比の値を用いて求めよ。

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
⋮	⋮	⋮	⋮
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
⋮	⋮	⋮	⋮



Point Pickup

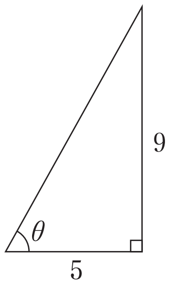
練習

(1)　次の三角比の値を求めよ。

(i)　$\sin 30°$　　(ii)　$\cos 45°$　　(iii)　$\tan 60°$

(2)　右の図において，θ のおよその大きさを，下の三角比の値を用いて求めよ。

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
⋮	⋮	⋮	⋮
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626
⋮	⋮	⋮	⋮



PART3　三角比の相互関係

例題

θ は鋭角とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\tan\theta=2$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

Point Pickup

練習

θ は鋭角とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\cos\theta = \dfrac{3}{4}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\tan\theta = \dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

PART4　$90^\circ - \theta$ の三角比，三角比の利用

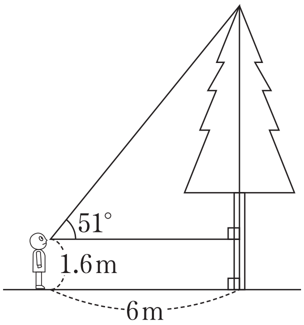
例題

(1)　次の三角比を，45° 以下の三角比で表せ。

(i)　$\sin 70^\circ$　　(ii)　$\cos 84^\circ$　　(iii)　$\tan 50^\circ$

(2)　木の根元から 6 m 離れたところで，木の先端を見上げたときの仰角が 51° であった。目の高さを 1.6 m として，木の高さを求めよ。

ただし，$\sin 51^\circ = 0.7771$，$\cos 51^\circ = 0.6293$，$\tan 51^\circ = 1.2349$ とし，小数第 2 位を四捨五入せよ。



Point Pickup

練習

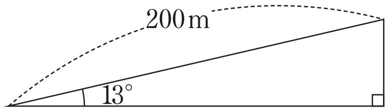
(1)　次の三角比を，45° 以下の三角比で表せ。

(i)　$\sin 54^\circ$　　(ii)　$\cos 88^\circ$　　(iii)　$\tan 72^\circ$

(2)　傾斜角が 13° の上り坂をまっすぐに 200 m 進むとき，次の問いに答えよ。ただし，$\sin 13^\circ = 0.2250$，$\cos 13^\circ = 0.9744$，$\tan 13^\circ = 0.2309$ とし，小数第 2 位を四捨五入して求めよ。

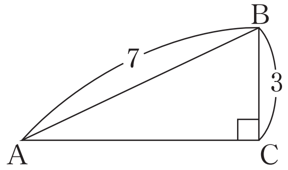
(i)　鉛直方向には何 m 上がることになるか。

(ii)　水平方向には何 m 進むことになるか。



第 9 講　PART1　確認問題

1 右の図において，
$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$
の値を求めよ。

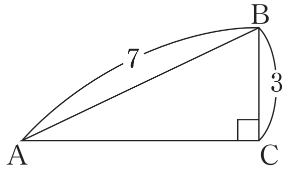


$$\sin A = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$$

$$\cos A = \frac{\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エオ}}}{\boxed{カ}}$$

$$\tan A = \frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}\sqrt{\boxed{ケコ}}}$$

2 右の図において，
$\sin B$，$\cos B$，$\tan B$
の値を求めよ。



$$\sin B = \frac{\boxed{サ}\sqrt{\boxed{シス}}}{\boxed{セ}}$$

$$\cos B = \frac{\boxed{ソ}}{\boxed{タ}}$$

$$\tan B = \frac{\boxed{チ}\sqrt{\boxed{ツテ}}}{\boxed{ト}}$$

第9講　PART2　確認問題

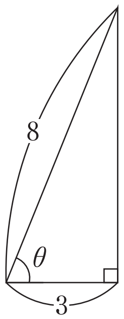
1　$\sin 45^\circ$，$\cos 60^\circ$，$\tan 30^\circ$ の値を求めよ。

$$\sin 45^\circ = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\sqrt{\boxed{\text{イ}}}},\quad \cos 60^\circ = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}},$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}$$

2　右の図において，θ のおおよその大きさを，下の三角比の値を用いて求めると，

$\theta \fallingdotseq \boxed{\text{キク}}^\circ$ である。



θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
⋮	⋮	⋮	⋮
66°	0.9135	0.4067	2.2460
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
⋮	⋮	⋮	⋮

第 9 講　PART3　確認問題

1　θ は鋭角とする。$\cos\theta=\dfrac{5}{6}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{\boxed{アイ}}}{\boxed{ウ}},\quad \tan\theta=\frac{\sqrt{\boxed{エオ}}}{\boxed{カ}}$$

2　θ は鋭角とする。$\tan\theta=\dfrac{2}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

$$\cos\theta=\frac{\boxed{キ}}{\sqrt{\boxed{クケ}}},\quad \sin\theta=\frac{\boxed{コ}}{\sqrt{\boxed{サシ}}}$$

第 9 講　PART4　確認問題

1 次の三角比を，45° 以下の三角比で表せ。

$\sin 66^\circ = \cos$ [アイ]°

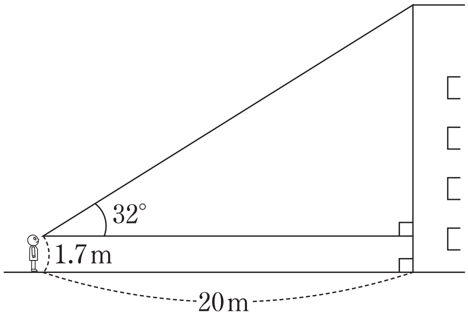
2 次の三角比を，45° 以下の三角比で表せ。

$\cos 83^\circ = \sin$ [ウ]°

3 次の三角比を，45° 以下の三角比で表せ。

$\tan 53^\circ = \dfrac{[エ]}{\tan [オカ]^\circ}$

4 建物の真下から 20 m 離れたところで，建物の屋上を見上げたときの仰角が 32° であった。目の高さを 1.7 m として，建物の高さを求めると，



[キク] . [ケ] m である。

ただし，$\sin 32^\circ = 0.5299$，$\cos 32^\circ = 0.8480$，$\tan 32^\circ = 0.6249$ とし，小数第 2 位を四捨五入せよ。

第 10 講　三角比の拡張

PART1　座標を用いた三角比の定義

例題

次の三角比の値を求めよ。

(1)　$\sin 120^\circ$，$\cos 120^\circ$，$\tan 120^\circ$

(2)　$\sin 135^\circ$，$\cos 135^\circ$，$\tan 135^\circ$

(3)　$\sin 150^\circ$，$\cos 150^\circ$，$\tan 150^\circ$

Point Pickup

練習

下の表の空欄にあてはまる値を入れ，表を完成させせよ。

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\theta$									
$\cos\theta$									
$\tan\theta$					／				

PART2　単位円を用いた三角比の定義

例題

(1)　次の三角比の値を，単位円を用いて求めよ。

(i)　$\sin 120°$，$\cos 120°$　　(ii)　$\sin 135°$，$\cos 135°$　　(iii)　$\sin 150°$，$\cos 150°$

(2)　次の三角比の値を，単位円を用いて求めよ。

(i)　$\tan 120°$　　(ii)　$\tan 135°$　　(iii)　$\tan 150°$

Point Pickup

練習

単位円を用いて，下の表の空欄にあてはまる値を入れ，表を完成させよ。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$									
$\cos\theta$									
$\tan\theta$									

PART3　三角比の値と角，直線の傾きと正接

例題

(1)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の等式を満たす θ を求めよ。

(i)　$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$　　(ii)　$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$　　(iii)　$\tan\theta = -1$

(2)　直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ と x 軸の正の向きとのなす角を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の等式を満たす θ を求めよ。

(i)　$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(ii)　$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(iii)　$\tan\theta = \sqrt{3}$

(2)　直線 $y = -x$ と x 軸の正の向きとのなす角を求めよ。

PART4　$180°-\theta$ の三角比，単位円と三角比の相互関係

例題

(1)　次の三角比を，鋭角の三角比で表せ。

(i)　$\sin 140°$　　(ii)　$\cos 155°$　　(iii)　$\tan 160°$

(2)　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。次の問いに答えよ。

(i)　$\sin\theta=\dfrac{2}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(ii)　$\cos\theta=\dfrac{12}{13}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(iii)　$\tan\theta=\sqrt{2}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　次の三角比を，鋭角の三角比で表せ。

(i)　$\sin 168^\circ$　　(ii)　$\cos 174^\circ$　　(iii)　$\tan 142^\circ$

(2)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の問いに答えよ。

(i)　$\sin\theta = \dfrac{3\sqrt{5}}{7}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(ii)　$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(iii)　$\tan\theta = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

第10講　PART1　確認問題

次の三角比の値を求め，①～⑨のうちから選べ。

1 $\sin 45^\circ=$ ア，$\cos 45^\circ=$ イ，$\tan 45^\circ=$ ウ

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{\sqrt{2}}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　④ 1　⑤ $\sqrt{2}$

⑥ $-\frac{1}{2}$　⑦ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$　⑧ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑨ -1

2 $\sin 120^\circ=$ エ，$\cos 120^\circ=$ オ，$\tan 120^\circ=$ カ

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{\sqrt{3}}{2}$　③ $\frac{1}{\sqrt{3}}$　④ $\sqrt{3}$　⑤ 0

⑥ $-\frac{1}{2}$　⑦ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑧ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$　⑨ $-\sqrt{3}$

3 $\sin 180^\circ=$ キ，$\cos 180^\circ=$ ク，$\tan 180^\circ=$ ケ

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{\sqrt{2}}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　④ 1　⑤ 0

⑥ $-\frac{1}{2}$　⑦ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$　⑧ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑨ -1

第 10 講　PART2　確認問題

次の三角比の値を，単位円を用いて求め，①～⑨のうちから選べ。

1　$\sin 60^\circ =$ ア，$\cos 60^\circ =$ イ，$\tan 60^\circ =$ ウ

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{\sqrt{2}}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　④ $\frac{1}{\sqrt{3}}$　⑤ $\sqrt{3}$

⑥ $-\frac{1}{2}$　⑦ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$　⑧ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑨ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

2　$\sin 150^\circ =$ エ，$\cos 150^\circ =$ オ，$\tan 150^\circ =$ カ

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{\sqrt{2}}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　④ $\frac{1}{\sqrt{3}}$　⑤ $\sqrt{3}$

⑥ $-\frac{1}{2}$　⑦ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$　⑧ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑨ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

3　$\sin 90^\circ =$ キ，$\cos 90^\circ =$ ク

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{\sqrt{2}}$　③ $\frac{1}{\sqrt{3}}$　④ 1　⑤ 0

⑥ $-\frac{1}{2}$　⑦ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$　⑧ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$　⑨ -1

第10講　PART3　確認問題

1　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とするとき，$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす θ を求めよ。

$\theta =$ [アイ]$^\circ$，[ウエオ]$^\circ$

2　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とするとき，$\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ を求めよ。

$\theta =$ [カキク]$^\circ$

3　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とするとき，$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす θ を求めよ。

$\theta =$ [ケコ]$^\circ$

4　直線 $y = -\sqrt{3}\,x$ と x 軸の正の向きとのなす角を求めよ。

$\theta =$ [サシス]$^\circ$

第10講　PART4　確認問題

1 次の三角比を，鋭角の三角比で表せ。

$\sin 177^\circ = \sin$ ア $^\circ$

2 次の三角比を，鋭角の三角比で表せ。

$\cos 146^\circ = -\cos$ イウ $^\circ$

3 次の三角比を，鋭角の三角比で表せ。

$\tan 138^\circ = -\tan$ エオ $^\circ$

4 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

$\cos\theta =$ カ ，$\tan\theta =$ キ

カ の選択肢

① $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　② $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

③ $\dfrac{2}{3}$　④ $\dfrac{2}{3}$，$-\dfrac{2}{3}$

キ の選択肢

① $\dfrac{1}{2}$　② $\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}$

③ $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$　④ $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$，$-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

5 $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。$\cos\theta = \dfrac{3}{4}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

$\sin\theta =$ [ク]，$\tan\theta =$ [ケ]

[ク] の選択肢

① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{1}{4}$, $-\dfrac{1}{4}$

③ $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　④ $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$, $-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

[ケ] の選択肢

① $\dfrac{1}{3}$　② $\dfrac{1}{3}$, $-\dfrac{1}{3}$

③ $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$　④ $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$, $-\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

6 $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。$\tan\theta = 2$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

$\cos\theta =$ [コ]，$\sin\theta =$ [サ]

[コ] の選択肢

① $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　② $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

③ $\dfrac{3}{4}$　④ $\dfrac{3}{4}$, $-\dfrac{3}{4}$

[サ] の選択肢

① $\dfrac{2}{3}$　② $\dfrac{2}{3}$, $-\dfrac{2}{3}$

③ $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$　④ $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

[MEMO]

第 11 講　正弦定理・余弦定理，三角形の面積

PART1　正弦定理

例題

△ABC において，外接円の半径を R とするとき，次のものを求めよ。

(1)　$a=5$，$A=30°$，$B=45°$ のとき　b，R

(2)　$b=1$，$c=\sqrt{3}$，$C=120°$ のとき　A，B

(3)　$c=4$，$R=2\sqrt{2}$ のとき，C

Point Pickup

練習

△ABC において，外接円の半径を R とするとき，次のものを求めよ。

(1)　$c=6$，$A=60^\circ$，$B=75^\circ$ のとき　a，R

(2)　$a=2$，$b=\sqrt{6}$，$A=45^\circ$ のとき　B，C

(3)　$a=10$，$R=10$ のとき，A

PART2　余弦定理

例題

△ABC において，次のものを求めよ。

(1)　$b=3$，$c=2\sqrt{3}$，$A=30^\circ$ のとき　a

(2)　$a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{10}$，$c=2$ のとき　B

(3)　$b=2$，$c=\sqrt{6}$，$C=60^\circ$ のとき　a

Point Pickup

練習

△ABC において，次のものを求めよ。

(1)　$a=3$，$b=4$，$C=120^\circ$ のとき　c

(2)　$a=13$，$b=7$，$c=15$ のとき　A

(3)　$a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{5}$，$B=45^\circ$ のとき　c

PART3　三角形の決定

例題

次の各場合について，△ABC の残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

(1)　$a=2\sqrt{3}$，$c=3-\sqrt{3}$，$B=120°$

(2)　$a=8$，$A=45°$，$C=30°$

Point Pickup

練習

次の各場合について，△ABC の残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

(1)　$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}-1$，$A=135^\circ$

(2)　$c=2$，$A=60^\circ$，$B=75^\circ$

PART4　三角形の面積

例題

次のような △ABC の面積 S を求めよ。

(1)　$a=6$，$b=5$，$C=30°$

(2)　$a=2\sqrt{7}$，$b=4$，$c=2$

(3)　$a=7$，$b=11$，$c=6$

Point Pickup

練習

次のような △ABC の面積 S を求めよ。

(1)　$a=2\sqrt{2}$，$c=3$，$B=45^\circ$

(2)　$a=5$，$b=3$，$c=7$

(3)　$a=8$，$b=6$，$c=4$

第11講　PART1　確認問題

1　△ABC において，外接円の半径を R とする。$b=3$，$A=135^\circ$，$B=30^\circ$ のとき，a，R の値を求めよ。

$a=$ [ア] $\sqrt{[イ]}$，$R=$ [ウ]

2　△ABC において，$b=\sqrt{2}$，$c=1$，$C=30^\circ$ のとき，B，A の値を求めよ。

$B=$ [エオ]°，$A=$ [カキク]°

または

$B=$ [ケコサ]°，$A=$ [シス]°

3　△ABC において，外接円の半径を R とする。$a=6$，$R=3\sqrt{2}$ のとき，A の値を求めよ。

$A=$ [セソ]°，[タチツ]°

第11講　PART2　確認問題

1 △ABC において，$b=\sqrt{5}$，$c=\sqrt{10}$，$A=45^\circ$ のとき，a の値を求めよ。

$a=\sqrt{\boxed{ア}}$

2 △ABC において，$a=4$，$b=\sqrt{7}$，$c=\sqrt{3}$ のとき，B の値を求めよ。

$B=\boxed{イウ}^\circ$

3 △ABC において，$a=2\sqrt{3}$，$b=\sqrt{13}$，$B=30^\circ$ のとき，c の値を求めよ。

$c=\boxed{エ}+\sqrt{\boxed{オカ}}$

第 11 講　PART3　確認問題

1　△ABC において，$b=\sqrt{2}$，$c=1+\sqrt{3}$，$A=45^\circ$ のとき，
残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

$a=$ ア ，$B=$ イウ °，$C=$ エオカ °

2　△ABC において，$a=\sqrt{2}$，$B=135^\circ$，$C=15^\circ$ のとき，
残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

$A=$ キク °，$b=$ ケ ，

$c=\sqrt{\text{コ}}-$ サ

第 11 講　PART4　確認問題

1　△ABC において，$a=2$，$c=5\sqrt{2}$，$B=45°$ のとき，面積 S を求めよ。

$S=$ ア

2　△ABC において，$a=\sqrt{7}$，$b=\sqrt{3}$，$c=1$ のとき，面積 S を求めよ。

$S=\dfrac{\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$

3　△ABC において，$a=7$，$b=5$，$c=4$ のとき，面積 S を求めよ。

$S=\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}$

第 12 講　図形の計量

PART1　角の二等分線の長さ，三角形の内接円と面積

例題

(1)　△ABC において，AB＝4，AC＝6，$A=60^\circ$ とする。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

(2)　△ABC において，$a=7$，$b=6$，$c=5$ のとき，この三角形の内接円の半径 r を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　△ABC において，AB = 5，AC = 4，$A = 120°$ とする。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

(2)　△ABC において，$a = 3$，$b = 5$，$C = 120°$ のとき，この三角形の内接円の半径 r を求めよ。

PART2　円に内接する四角形の面積

例題

円に内接する四角形 ABCD において

$AB = 2$，$BC = 3$，$CD = 2$，$\angle ABC = 60°$

のとき，次の値を求めよ。

(1)　AC の長さ　　(2)　AD の長さ　　(3)　四角形 ABCD の面積

Point Pickup

練習

円に内接する四角形 ABCD において

$AB = \sqrt{2}$，$BC = 1$，$CD = 1$，$\angle ABC = 135°$

のとき，四角形 ABCD の面積を求めよ。

PART3　直方体の切り口

例題

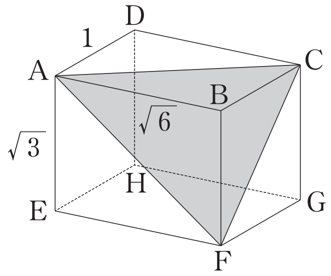
右の図のような

$AB=\sqrt{6}$，$AD=1$，$AE=\sqrt{3}$

である直方体 ABCD−EFGH がある。

(1)　△AFC の面積を求めよ。

(2)　頂点 B から △AFC に下ろした垂線を BI とする。
　　BI の長さを求めよ。



Point Pickup

練習

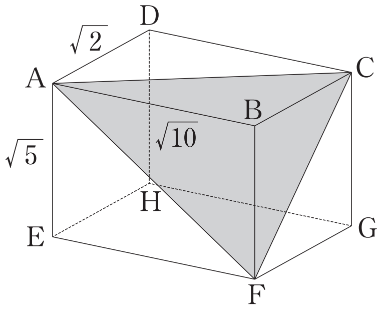
右の図のような

$AB=\sqrt{10}$，$AD=\sqrt{2}$，$AE=\sqrt{5}$

である直方体 ABCD−EFGH がある。

⑴　△AFC の面積を求めよ。

⑵　頂点 B から △AFC に下ろした垂線を BI とする。BI の長さを求めよ。



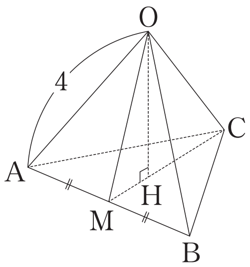
PART4　四面体の切り口

例題

1 辺の長さが 4 である正四面体 OABC において，辺 AB の中点を M とし，頂点 O から CM に垂線 OH を下ろす。

(1)　$\angle$OMC $= \theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2)　OH の長さを求めよ。



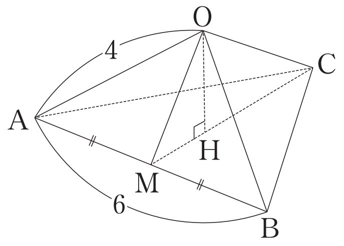
Point Pickup

練習

四面体OABCにおいて，$OA=OB=OC=4$，$AB=BC=CA=6$ である。辺ABの中点をMとし，頂点OからCMに垂線OHを下ろす。

⑴　$\angle OMC=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

⑵　OHの長さを求めよ。



第 12 講　PART1　確認問題

1　△ABC において，AB＝4，AC＝8，$A=60^\circ$ とする。
∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

$$\mathrm{AD}=\frac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$$

2　△ABC において，$a=9$，$b=6$，$c=5$ のとき，この三角形の内接円の半径 r を求めよ。

$$r=\sqrt{\boxed{エ}}$$

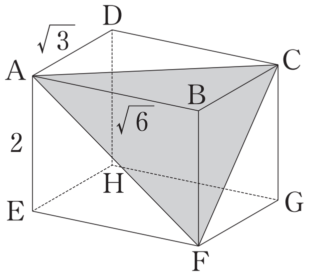
第12講　PART2　確認問題

1　円に内接する四角形 ABCD において，AB = 5，BC = 1，CD = 4，∠ABC = 60° のとき，四角形 ABCD の面積 S を求めよ。

$$S = \frac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$$

第12講　PART3　確認問題

右の図のような，$AB=\sqrt{6}$，$AD=\sqrt{3}$，$AE=2$ である直方体 ABCD−EFGH がある。



1　△AFC の面積 S を求めよ。

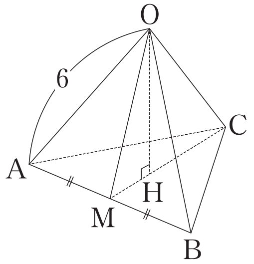
$$S=\frac{\boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$$

2　頂点 B から △AFC に下ろした垂線を BI とする。BI の長さを求めよ。

$$BI=\frac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}$$

第12講　PART4　確認問題

1 辺の長さが 6 である正四面体 OABC において，辺 AB の中点を M とし，頂点 O から CM に垂線 OH を下ろす。



1　∠OMC = θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

$$\cos\theta = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

2　OH の長さを求めよ。

$$\text{OH} = \boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$$

第 13 講　データの分析

PART1　データの整理，データの散らばり，外れ値

例題

次のデータは，A 町のある年における降水日数を月ごとに調べたものである。

3，8，11，11，5，9，11，10，18，5，7，10（日）

(1)　このデータの平均値，中央値，最頻値を求めよ。

(2)　このデータの範囲，四分位数，四分位範囲を求め，箱ひげ図をかけ。

(3)　次のような値を外れ値と定める。

> データの第 1 四分位数を Q_1，第 3 四分位数を Q_3 とするとき，
> $Q_1-1.5\times(Q_3-Q_1)$ 以下の値 または $Q_3+1.5\times(Q_3-Q_1)$ 以上の値

与えられたデータに外れ値はあるか。ある場合はその外れ値を示した上で，外れ値を除いたデータにおける平均値を求めよ。

Point Pickup

練習

次のデータは，A さんと B さんのあるゲームの記録を，値の小さい順に並べたものである。

A さん：2，5，5，6，7，7，7，8，8，9

B さん：1，4，4，4，5，5，7，9，15

(1)　それぞれのデータの平均値を求めよ。

(2)　2 つのデータの箱ひげ図を並べてかけ。

(3)　次のような値を外れ値と定める。

> データの第 1 四分位数を Q_1，第 3 四分位数を Q_3 とするとき，
> $Q_1-1.5\times(Q_3-Q_1)$ 以下の値 または $Q_3+1.5\times(Q_3-Q_1)$ 以上の値

それぞれのデータに外れ値はあるか。ある場合はその外れ値を示した上で，外れ値を除いたデータにおける平均値を求めよ。

PART2　分散と標準偏差

例題

次のデータは，あるサッカーチームが 10 試合行ったときの，各試合に決めたゴール数の結果である。

0，1，4，1，5，1，3，1，0，4 (回)

(1)　このデータの平均値 $\overline{x}$ を求めよ。

(2)　このデータの分散 s^2 を求めよ。

(3)　このデータの標準偏差 s を求めよ。

Point Pickup

練習

次のデータは，アーティスト A，B の新曲をあるレコード店でそれぞれ 5 名ずつ試聴してもらい，曲の評価を 10 点満点でつけてもらった結果である。

アーティスト A：5，7，3，6，9

アーティスト B：4，6，5，8，7（単位は点）

アーティスト A，B の曲の評価をそれぞれ x 点，y 点とする。

(1)　変量 x の平均値 $\overline{x}$，分散 $s_x{}^2$，標準偏差 s_x を求めよ。

(2)　変量 y の平均値 $\overline{y}$，分散 $s_y{}^2$，標準偏差 s_y を求めよ。

(3)　標準偏差 s_x，s_y によって，アーティスト A，B の評価の散らばりの度合いを比較せよ。

PART3　データの相関

例題

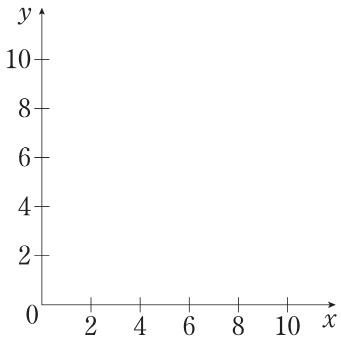
次の表は，2 つの変量 x，y からなるデータである。

x	2	5	1	9	3	6	7	4	8	6
y	8	6	9	2	7	4	3	7	2	3

(1)　散布図をかき，x，y の間に相関があるか調べよ。また，相関がある場合は，正，負のどちらの相関があると考えられるかを答えよ。

(2)　x と y の分散はともに 6.09，x と y の共分散は -5.91 である。x と y の相関係数を求めよ。ただし小数第 3 位を四捨五入せよ。

〈散布図〉



Point Pickup

練習

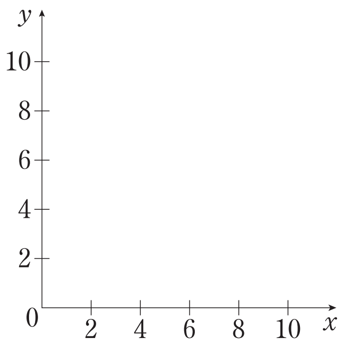
次の表は，5 人の生徒 a，b，c，d，e の小テスト A，B の得点である。A の得点を x(点)，B の得点を y(点)とする。

生徒	a	b	c	d	e
A の得点	10	8	4	7	6
B の得点	6	9	3	5	7

⑴　散布図をかき，x，y の間に相関があるか調べよ。
また，相関がある場合は，正，負のどちらの相関があると考えられるかを答えよ。

⑵　x と y の相関係数を求めよ。

〈散布図〉



PART4　仮説検定

例題

あるゲームにおいて，A と B は互角の実力といわれている。この 2 人の対戦結果の，直近 8 回の結果は，A の 7 勝 1 敗であった。この結果から，A の実力は B の実力より上である，と判断してよいか。基準となる確率を 0.05 とし，仮説検定を用いて考察せよ。
ただし，表と裏が出る確率がともに 0.5 であるコインを 8 回投げて表が出た回数を記録する操作を 1000 セット行った結果が以下の表であるとし，この結果を用いよ。

表の回数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	計
度数	4	29	113	216	274	220	108	31	5	1000

Point Pickup

練習

ある文具メーカーが，自社製品Aを改良し，製品Bを試作した。25人にアンケートを実施した。次の(1)，(2)のアンケート結果が得られたとき，各場合においてBがAより使い心地がよいと判断してよいか。基準となる確率を0.05とし，仮説検定を用いて考察せよ。

ただし，表と裏が出る確率がともに0.5であるコインを25回投げて表が出た回数を記録する操作を200セット行った結果が以下の表であるとし，この結果を用いよ。

表の回数	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	計
度数	3	7	12	19	27	31	33	25	20	12	7	2	1	1	200

(1)　25人中18人がBがAより使い心地がよいと答えた。

(2)　25人中17人がBがAより使い心地がよいと答えた。

第 13 講　PART1　確認問題

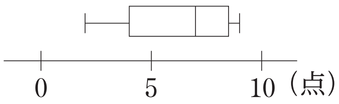
次のデータは，生徒 10 人が 10 点満点の小テストを受けた結果をまとめたものである。

7，8，4，7，10，8，9，2，10，7　（点）

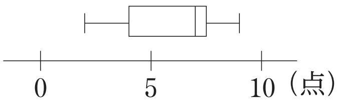
1　平均値は ア . イ 点である。

2　このデータの箱ひげ図として適切なものを，下の中から選べ。 ウ

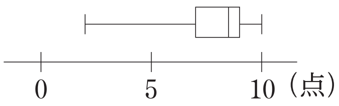
①



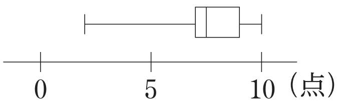
②



③



④



3　次のような値を外れ値と定める。

> データの第 1 四分位数を Q_1，第 3 四分位数を Q_3 とするとき，$Q_1-1.5(Q_3-Q_1)$ 以下の値，または $Q_3+1.5(Q_3-Q_1)$ 以上の値

与えられたデータに外れ値はあるか。下の中から適切なものを選べ。 エ

①　外れ値は 2　　　②　外れ値は 2，4

③　外れ値は 2，4，10　　　④　外れ値はない

第13講　PART2　確認問題

次のような２つのデータ A，B がある。

A：7，8，10，10，11，13，14，15

B：−2，−1，−1，0，1，1，1，2，2，3

A，B の値をそれぞれ x，y とする。

1 変量 x の平均値 $\overline{x}$ は [アイ] である。

2 変量 x の分散 $s_x{}^2$ は [ウ] である。また，標準偏差 s_x は [エ] である。

[エ] は，次の①～④のうちから最も近いものを選べ。

①　1.33　　②　2.65　　③　3.74　　④　5

3 変量 y の平均値 $\overline{y}$ は 0. [オ] である。

4 変量 y の分散 $s_y{}^2$ は [カ] . [キク] である。また，標準偏差 s_y は [ケ] である。

[ケ] は，次の①～④のうちから最も近いものを選べ。

①　0.75　　②　0.98　　③　1.50　　④　1.87

5 標準偏差 s_x，s_y によって，A，B の散らばりの度合いを比較すると，[コ] の方が散らばりの度合いが大きい。

[コ] は，次の①，②のうちから選べ。

①　A　　②　B

第 13 講　PART3　確認問題

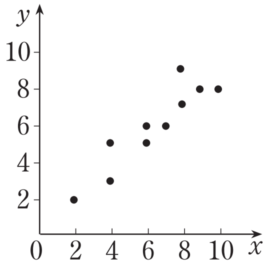
1　次のデータの散布図として適当なものを，下の①～④から選べ。［ア］

また，x と y の間にはどんな関係があるといえるか。適当なものを，下の①～③から選べ。［イ］

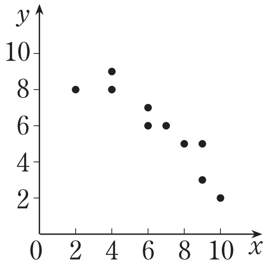
x	2	4	4	6	6	7	8	8	9	10
y	2	3	5	5	6	6	7	9	8	8

［ア］の選択肢

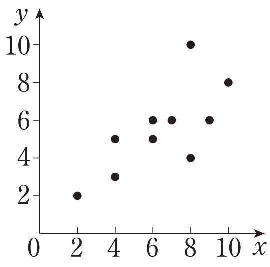
①



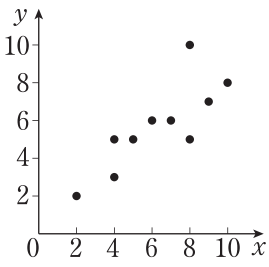
②



③



④



［イ］の選択肢

①　正の相関がある。

②　負の相関がある。

③　相関がない。

2 次の表は 2 つの変量 x，y からなるデータである。x と y の相関係数 r は，$r=0.$ **ウエ** である。ただし，$\sqrt{2}=1.41$ とし，小数第 3 位を四捨五入して答えよ。

x	1	4	5	6	7	8	8	9
y	7	11	8	10	10	10	13	11

第13講　PART4　確認問題

1　ある高校で，無作為に選んだ30人に，野球とサッカーのどちらをより好むかアンケートを実施したところ，10人が野球，20人がサッカーと答えた。この結果から，この学校では野球よりサッカーを好む人の方が多いと判断してよいか。基準となる確率を0.05として仮説検定を用いて考察し，適当なものを，下の①～③から選べ。［ア］

ただし，表と裏が出る確率がともに0.5であるコインを30回投げて表が出た回数を記録する操作を500セット行った結果が以下の表であるとし，この結果を用いよ。

表の回数	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	計
度数	3	5	16	27	39	53	69	76	65	57	39	27	13	7	4	500

①　サッカーを好む人の方が多いと判断してよい。

②　サッカーを好む人の方が多いとは判断できない。

③　野球を好む人の方が多いと判断してよい。

[MEMO]

第 1 講　式の計算と展開

PART1　整式の整理

例題

(1)　単項式 $2x^2y$ の係数と次数をいえ。また，x に着目したときの係数と次数をいえ。

(2)　多項式 $2x^2+3xy+y^2-4x+5y-1$ を，x について整理せよ。

(1)　係数は 2，次数は 3

x に着目すると $2y\times x^2$　　よって，係数は $2y$，次数は 2

(2)　$2x^2+3xy+y^2-4x+5y-1=2x^2+(3y-4)x+y^2+5y-1$

練習

(1)　次の単項式で，[　] 内の文字に着目したときの係数と次数をいえ。

$-4ax^3y^2$　　[a]，[x と y]

(2)　多項式 $3x^2-ax-5a+2x$ を，x について整理せよ。

(1)　a に着目すると $-4x^3y^2\times a$　　よって，係数 $-4x^3y^2$，次数 1

x と y に着目すると $-4a\times x^3y^2$　　よって，係数 $-4a$，次数 5

(2)　$3x^2-ax-5a+2x=3x^2+(-a+2)x-5a$

PART2　整式の加法と減法，乗法

例題

(1)　$A=2x^2-xy+5y^2$，$B=-3x^2+4xy+y^2$ のとき，$2A-3B$ を計算せよ。

(2)　次の計算をせよ。

(i)　$3xy\times4x^3y^2$　　(ii)　$(-2ab^2)^3\times(-a^2b)$　　(iii)　$-4xy(3x-5y^2)$

(1)　$2A-3B=2(2x^2-xy+5y^2)-3(-3x^2+4xy+y^2)$

$=4x^2-2xy+10y^2+9x^2-12xy-3y^2=13x^2-14xy+7y^2$

(2)(i)　$3xy\times4x^3y^2=3\times4\times x^{1+3}y^{1+2}=12x^4y^3$

(ii)　$(-2ab^2)^3\times(-a^2b)=(-2)^3a^3(b^2)^3\times(-a^2b)=-8a^3b^{2\times3}\times(-a^2b)=8a^5b^7$

(iii)　$-4xy(3x-5y^2)=(-4xy)\cdot3x+(-4xy)\cdot(-5y^2)=-12x^2y+20xy^3$

練習

(1)　$A=2x^3+4x^2y-7xy^2-8y^3$，$B=-x^3+6x^2y+3xy^2-4y^2$ のとき，$2(A+B)-3A$ を計算せよ。

(2)　次の計算をせよ。

(i)　$2x^2y^3z\times(-5xy^3z^4)$　　(ii)　$(-3ab^2)^2\times(-a^2b)^3$

(iii)　$6mn\left(\frac{3}{2}m^2-\frac{1}{6}mn-\frac{2}{3}n^2\right)$

(1)　$2(A+B)-3A=2A+2B-3A=-A+2B$

$=-(2x^3+4x^2y-7xy^2-8y^3)+2(-x^3+6x^2y+3xy^2-4y^2)$

$=-2x^3-4x^2y+7xy^2+8y^3-2x^3+12x^2y+6xy^2-8y^2$

$=-4x^3+8x^2y+13xy^2+8y^3-8y^2$

(2)(i)　$2x^2y^3z\times(-5xy^3z^4)=-10x^3y^6z^5$

(ii)　$(-3ab^2)^2\times(-a^2b)^3=9a^2b^4\times(-a^6b^3)=-9a^8b^7$

(iii)　$6mn\left(\frac{3}{2}m^2-\frac{1}{6}mn-\frac{2}{3}n^2\right)=6mn\cdot\frac{3}{2}m^2+6mn\cdot\left(-\frac{1}{6}mn\right)+6mn\cdot\left(-\frac{2}{3}n^2\right)$

$=9m^3n-m^2n^2-4mn^3$

PART3　展開

例題

次の式を展開せよ。

(1)　$(2x+5)(x+3)$

(2)　$(x-y-2z)(x-y+z)$

(3)　$(a+b-c)^2$

(1)　$(2x+5)(x+3)=2\cdot1x^2+(2\cdot3+5\cdot1)x+5\cdot3=2x^2+11x+15$

(2)　$x-y=A$ とおくと

$$\begin{aligned}(x-y-2z)(x-y+z)&=(A-2z)(A+z)=A^2-Az-2z^2\\&=(x-y)^2-(x-y)z-2z^2\\&=x^2-2xy+y^2-xz+yz-2z^2\\&=x^2+y^2-2z^2-2xy+yz-zx\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}(a+b-c)^2&=\{(a+b)-c\}^2\\&=(a+b)^2-2(a+b)c+c^2\\&=a^2+2ab+b^2-2ac-2bc+c^2\\&=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca\end{aligned}$$

練習

次の式を展開せよ。

(1)　$(2x+4y)(3x-7y)$

(2)　$(a+b-c-d)(a-b-c+d)$

(3)　$(a-b+2c)^2$

(1)　$(2x+4y)(3x-7y)=2\cdot3x^2+\{2\cdot(-7)+4\cdot3\}xy+4\cdot(-7)y^2=6x^2-2xy-28y^2$

(2)　$a-c=A,\ b-d=B$ とおくと

$$\begin{aligned}(a+b-c-d)(a-b-c+d)&=(A+B)(A-B)=A^2-B^2\\&=(a-c)^2-(b-d)^2\\&=a^2-2ac+c^2-(b^2-2bd+d^2)\\&=a^2-b^2+c^2-d^2-2ac+2bd\end{aligned}$$

(3)　$$\begin{aligned}(a-b+2c)^2&=\{(a-b)+2c\}^2\\&=(a-b)^2+4(a-b)c+4c^2\\&=a^2-2ab+b^2+4ac-4bc+4c^2\\&=a^2+b^2+4c^2-2ab-4bc+4ca\end{aligned}$$

PART4　展開の工夫

例題

次の式を展開せよ。

(1)　$(x+1)(x-1)(x+2)(x+4)$

(2)　$(a+b)^2(a-b)^2$

(1)　$$\begin{aligned}(x+1)(x-1)(x+2)(x+4)&=\{(x+1)(x+2)\}\{(x-1)(x+4)\}\\&=(x^2+3x+2)(x^2+3x-4)\\&=(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8\\&=x^4+6x^3+9x^2-2x^2-6x-8\\&=x^4+6x^3+7x^2-6x-8\end{aligned}$$

(2)　$$\begin{aligned}(a+b)^2(a-b)^2&=\{(a+b)(a-b)\}^2\\&=(a^2-b^2)^2\\&=a^4-2a^2b^2+b^4\end{aligned}$$

練習

次の式を展開せよ。

(1)　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

(2)　$(a+b)^2(a-b)^2(a^2+b^2)^2$

(1)　$$\begin{aligned}(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)&=\{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}\\&=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)\\&=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24\\&=x^4+10x^3+25x^2+10x^2+50x+24\\&=x^4+10x^3+35x^2+50x+24\end{aligned}$$

(2)　$$\begin{aligned}(a+b)^2(a-b)^2(a^2+b^2)^2&=\{(a+b)(a-b)(a^2+b^2)\}^2\\&=\{(a^2-b^2)(a^2+b^2)\}^2=(a^4-b^4)^2\\&=a^8-2a^4b^4+b^8\end{aligned}$$

第 2 講　因数分解

PART1　因数分解

例題

次の式を因数分解せよ。

(1)　$8x^3-12x^2y$　(2)　$(a-b)x+(b-a)y$　(3)　$9x^2+6x+1$

(4)　$16a^2-49b^2$　(5)　$x^2-2xy-15y^2$

(1)　$8x^3-12x^2y=4x^2(2x-3y)$

(2)　$(a-b)x+(b-a)y=(a-b)x-(a-b)y=(a-b)(x-y)$

(3)　$9x^2+6x+1=(3x+1)^2$

(4)　$16a^2-49b^2=(4a+7b)(4a-7b)$

(5)　$x^2-2xy-15y^2=(x+3y)(x-5y)$

練習

次の式を因数分解せよ。

(1)　$6ab^2c-2ac^2+3a^2bc$　(2)　$a(x-2y)-bx+2by$　(3)　$x^2-18xy+81y^2$

(4)　$36a^2-9$　(5)　$x^2-11ax+24a^2$

(1)　$6ab^2c-2ac^2+3a^2bc=ac\left(6b^2-2c+3ab\right)$

(2)　$a(x-2y)-bx+2by=a(x-2y)-b(x-2y)=(x-2y)(a-b)$

(3)　$x^2-18xy+81y^2=(x-9y)^2$

(4)　$36a^2-9=9\left(4a^2-1\right)=9(2a+1)(2a-1)$

(5)　$x^2-11ax+24a^2=(x-3a)(x-8a)$

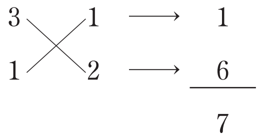
PART2　たすきがけによる因数分解

例題

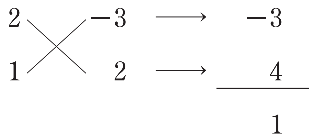
次の式を因数分解せよ。

(1)　$3x^2+7x+2$　　(2)　$2x^2+xy-6y^2$

(1)　$3x^2+7x+2=(3x+1)(x+2)$



(2)　$2x^2+xy-6y^2=(2x-3y)(x+2y)$

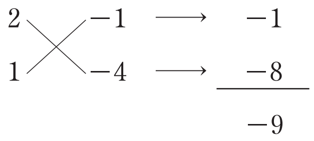


練習

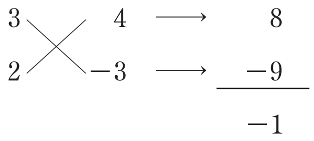
次の式を因数分解せよ。

(1)　$2x^2-9x+4$　　(2)　$6a^2-ab-12b^2$

(1)　$2x^2-9x+4=(2x-1)(x-4)$



(2)　$6a^2-ab-12b^2=(3a+4b)(2a-3b)$



PART3　おき換えによる因数分解

例題

次の式を因数分解せよ。

(1)　$(x-y)^2-3(x-y)+2$　　(2)　x^4+x^2-2

(1)　$x-y=X$ とおくと

$$(x-y)^2-3(x-y)+2=X^2-3X+2=(X-1)(X-2)$$
$$=(x-y-1)(x-y-2)$$

(2)　$x^2=X$ とおくと

$$x^4+x^2-2=(x^2)^2+x^2-2=X^2+X-2=(X-1)(X+2)$$
$$=(x^2-1)(x^2+2)$$
$$=(x+1)(x-1)(x^2+2)$$

練習

次の式を因数分解せよ。

(1)　$2(x-1)^2+5(x-1)-3$　　(2)　x^4-16y^4

(1)　$x-1=X$ とおくと

$$2(x-1)^2+5(x-1)-3=2X^2+5X-3=(2X-1)(X+3)$$
$$=\{2(x-1)-1\}\{(x-1)+3\}$$
$$=(2x-3)(x+2)$$

(2)　$x^2=X,\ y^2=Y$ とおくと

$$x^4-16y^4=(x^2)^2-16(y^2)^2=X^2-16Y^2=(X-4Y)(X+4Y)$$
$$=(x^2-4y^2)(x^2+4y^2)$$
$$=(x+2y)(x-2y)(x^2+4y^2)$$

PART4　1 文字整理による因数分解

例題

次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^2-8y+2xy-16$　　　(2)　$x^2-2xy+y^2-x+y-2$

(1)　$x^2-8y+2xy-16=(2x-8)y+x^2-16$

$=2(x-4)y+(x+4)(x-4)$

$=(x-4)\{2y+(x+4)\}=(x-4)(x+2y+4)$

(2)　$x^2-2xy+y^2-x+y-2$

$=x^2+(-2y-1)x+y^2+y-2$

$=x^2+(-2y-1)x+(y+2)(y-1)$

$=(x-y-2)(x-y+1)$

1	$-(y+2)$	⟶	$-y-2$
1	$-(y-1)$	⟶	$-y+1$
			$-2y-1$

練習

次の式を因数分解せよ。

(1)　$x^2+xy+2x+y+1$　　　(2)　$2x^2+3xy+y^2-11x-6y+5$

(1)　$x^2+xy+2x+y+1=(x+1)y+x^2+2x+1$

$=(x+1)y+(x+1)^2$

$=(x+1)\{y+(x+1)\}=(x+1)(x+y+1)$

(2)　$2x^2+3xy+y^2-11x-6y+5$

$=2x^2+(3y-11)x+y^2-6y+5$

$=2x^2+(3y-11)x+(y-1)(y-5)$

$=(2x+y-1)(x+y-5)$

2	$y-1$	⟶	$y-1$
1	$y-5$	⟶	$2y-10$
			$3y-11$

第 3 講　実数，１次不等式

PART1　実数，絶対値

例題

(1)　次の循環小数を分数で表せ。

(i)　$0.\dot{4}$　　(ii)　$0.\dot{2}3\dot{4}$

(2)　次の値を求めよ。

(i)　$|5|$　　(ii)　$|-2|$　　(iii)　$|\sqrt{3}-2|$

(1)(i)　$x=0.\dot{4}$ とおくと，右の計算より

$$\begin{array}{rrl} & 10x = & 4.444\cdots\cdots \\ -) & x = & 0.444\cdots\cdots \\ \hline & 9x = & 4 \end{array}$$

$9x=4$　　$x=\dfrac{4}{9}$

(ii)　$x=0.\dot{2}3\dot{4}$ とおくと，右の計算より

$$\begin{array}{rrl} & 1000x = & 234.234234\cdots\cdots \\ -) & x = & 0.234234\cdots\cdots \\ \hline & 999x = & 234 \end{array}$$

$999x=234$　　$x=\dfrac{234}{999}=\dfrac{26}{111}$

(2)(i)　$|5|=5$　　(ii)　$|-2|=2$　　(iii)　$|\sqrt{3}-2|=-\sqrt{3}+2$

練習

(1)　次の循環小数を分数で表せ。

(i)　$0.\dot{2}4\dot{6}$　　(ii)　$0.1\dot{2}\dot{3}$

(2)　次の値を求めよ。

(i)　$|-8|$　　(ii)　$|\pi-4|$　　(iii)　$x\geqq 3$ のとき $|x-3|$

(1)(i)　$x=0.\dot{2}4\dot{6}$ とおくと，右の計算より

$$\begin{array}{rrl} & 1000x = & 246.246246\cdots\cdots \\ -) & x = & 0.246246\cdots\cdots \\ \hline & 999x = & 246 \end{array}$$

$999x=246$　　$x=\dfrac{246}{999}=\dfrac{82}{333}$

(ii)　$x=0.1\dot{2}\dot{3}$ とおくと，右の計算より

$$\begin{array}{rrl} & 1000x = & 123.2323\cdots\cdots \\ -) & 10x = & 1.2323\cdots\cdots \\ \hline & 990x = & 122 \end{array}$$

$990x=122$　　$x=\dfrac{122}{990}=\dfrac{61}{495}$

(2)(i)　$|-8|=8$

(ii)　$\pi=3.14\cdots<4$ より $\pi-4<0$　よって $|\pi-4|=-(\pi-4)=-\pi+4$

(iii)　$x\geqq 3$ のとき $x-3\geqq 0$　よって $|x-3|=x-3$

PART2　根号を含む式の計算

例題

(1)　次の式の分母を有理化せよ。

(i)　$\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$　　(ii)　$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

(2)　$x=\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}$，$y=\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(i)　$x+y$　　(ii)　xy　　(iii)　x^2+y^2

(1)(i)　$\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6-2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(ii)　$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}=\dfrac{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}}{\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}}$

$$=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3+2\sqrt{2}-3}$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$$

(2)　$x=\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$y=\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

(i)　$x+y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$

(ii)　$xy=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}=\dfrac{4}{4}=1$

(iii)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(\sqrt{5})^2-2\cdot1=3$

練習

(1)　次の式の分母を有理化せよ。

(i)　$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$　　(ii)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

(2)　$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ のとき，次の式の値を求めよ。

(i)　$x+y$　　(ii)　xy　　(iii)　x^2+y^2

(1)(i)　$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\dfrac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\dfrac{4-4\sqrt{3}+3}{4-3}=7-4\sqrt{3}$

(ii)　$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}{\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5}$

$=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}-5}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$

(2)　$x=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$y=\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

(i)　$x+y=(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{3}$

(ii)　$xy=(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=1$

(iii)　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{3})^2-2\cdot 1=10$

PART3　1次不等式

例題

(1)　次の不等式・連立不等式を解け。

(i)　$3(2x-1)<8x-1$

(ii)　$\begin{cases} 4x+5>25-x \\ \dfrac{3x-1}{2} \leqq \dfrac{2(x+5)}{3}+2 \end{cases}$

(iii)　$-2x+1<3x+4<2(3x-4)$

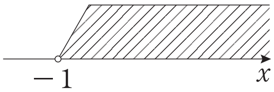
(2)　$\dfrac{6x+1}{6} \geqq \dfrac{5}{3}x-\dfrac{5}{2}$ を満たす自然数 x をすべて求めよ。

(1)(i)　$3(2x-1)<8x-1$

$6x-3<8x-1$

$-2x<2$

$x>-1$



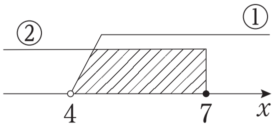
(ii)　$\begin{cases} 4x+5>25-x & \cdots\cdots① \\ \dfrac{3x-1}{2} \leqq \dfrac{2(x+5)}{3}+2 & \cdots\cdots② \end{cases}$

①より　$5x>20$　　$x>4$

②より　$3(3x-1) \leqq 4(x+5)+12$

$9x-3 \leqq 4x+20+12$　　$5x \leqq 35$　　$x \leqq 7$

①と②の共通部分を求めて　$4<x \leqq 7$

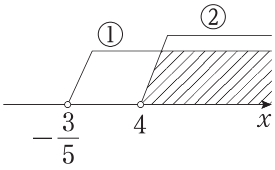


(iii)　$\begin{cases} -2x+1<3x+4 & \cdots\cdots① \\ 3x+4<2(3x-4) & \cdots\cdots② \end{cases}$

①より　$-5x<3$　　$x>-\dfrac{3}{5}$

②より　$3x+4<6x-8$　　$-3x<-12$　　$x>4$

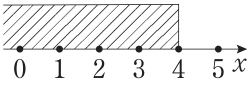
①と②の共通部分を求めて　$x>4$



(2)　$\dfrac{6x+1}{6} \geqq \dfrac{5}{3}x-\dfrac{5}{2}$ より

$6x+1 \geqq 10x-15$　　$-4x \geqq -16$　　$x \leqq 4$

これを満たす自然数 x は $x=1,\ 2,\ 3,\ 4$



練習

(1)　次の不等式・連立不等式を解け。

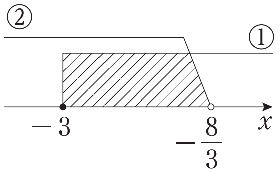
(i)　$\begin{cases} 5x+2 \geqq 4x-1 \\ 5x-3 > 8x+5 \end{cases}$　　(ii)　$8(x+2) < 5x+1 \leqq 3(x-4)$

(2)　不等式 $\dfrac{x+8}{2} < \dfrac{4}{3}x+1$ を満たす最小の整数 x を求めよ。

(1)(i)　$\begin{cases} 5x+2 \geqq 4x-1 & \cdots\cdots① \\ 5x-3 > 8x+5 & \cdots\cdots② \end{cases}$

①より $x \geqq -3$

②より $-3x > 8$　　$x < -\dfrac{8}{3}$

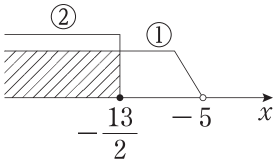


①と②の共通部分をとって $-3 \leqq x < -\dfrac{8}{3}$

(ii)　$\begin{cases} 8(x+2) < 5x+1 & \cdots\cdots① \\ 5x+1 \leqq 3(x-4) & \cdots\cdots② \end{cases}$

①より $8x+16 < 5x+1$　　$3x < -15$　　$x < -5$

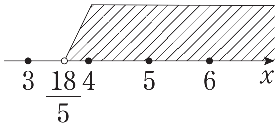
②より $5x+1 \leqq 3x-12$　　$2x \leqq -13$　　$x \leqq -\dfrac{13}{2}$



①，②の共通部分をとって $x \leqq -\dfrac{13}{2}$

(2)　$\dfrac{x+8}{2} < \dfrac{4}{3}x+1$ より $3(x+8) < 8x+6$

$-5x < -18$　　$x > \dfrac{18}{5} = 3.6$



これを満たす最小の整数 x は $x=4$

PART4　絶対値を含む方程式・不等式

例題

次の方程式・不等式を解け。

(1)　$|x-2|=3$　(2)　$|2x-1|<5$　(3)　$|3x+2|\geqq 4$　(4)　$|x+4|=5x$

(1)　$|x-2|=3$　より　$x-2=\pm 3$

つまり　$x-2=3$，$x-2=-3$ より　$x=5$，-1

(2)　$|2x-1|<5$　より $-5<2x-1<5$　　$-4<2x<6$

よって $-2<x<3$

(3)　$|3x+2|\geqq 4$ より $3x+2\leqq -4$，$4\leqq 3x+2$

$3x\leqq -6$，$2\leqq 3x$

よって $x\leqq -2$，$\dfrac{2}{3}\leqq x$

(4)　$|x+4|=5x$

$x\geqq -4$ のとき $x+4=5x$　　$x=1$　　これは $x\geqq -4$ を満たす。

$x<-4$ のとき $-x-4=5x$　　$x=-\dfrac{2}{3}$　　これは $x<-4$ を満たさず不適。

したがって，求める解は $x=1$

練習

次の方程式・不等式を解け。

(1)　$|x+5|=2$　(2)　$|3x+2|\leqq 3$　(3)　$|x-1|\geqq 2$　(4)　$|x-3|=-2x$

(1)　$|x+5|=2$ より $x+5=\pm 2$

つまり $x+5=2$，$x+5=-2$ より $x=-3$，-7

(2)　$|3x+2|\leqq 3$ より $-3\leqq 3x+2\leqq 3$　　$-5\leqq 3x\leqq 1$

よって $-\dfrac{5}{3}\leqq x\leqq \dfrac{1}{3}$

(3)　$|x-1| \geqq 2$ より $x-1 \leqq -2$，$2 \leqq x-1$

よって $x \leqq -1$，$3 \leqq x$

(4)　$|x-3| = -2x$

$x \geqq 3$ のとき $x-3=-2x$　　$x=1$　　これは $x \geqq 3$ を満たさず不適。

$x < 3$ のとき $-x+3=-2x$　　$x=-3$　　これは $x < 3$を満たす。

したがって，求める解は $x=-3$

第 4 講　集合，命題と条件

PART1　集合

例題

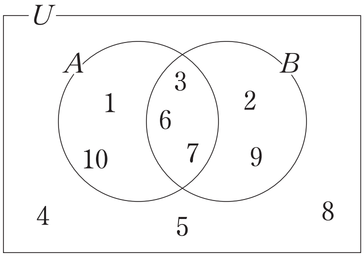
全体集合 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$ の部分集合 A，B を

$$A=\{1,\ 3,\ 6,\ 7,\ 10\},\quad B=\{2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 9\}$$

とする。このとき，次の集合を求めよ。

(1)　$A\cap B$　　(2)　$A\cup B$　　(3)　$\overline{A}$　　(4)　$\overline{A}\cup\overline{B}$

ベン図は右図。



(1)　$A\cap B=\{3,\ 6,\ 7\}$

(2)　$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10\}$

(3)　$\overline{A}=\{2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9\}$

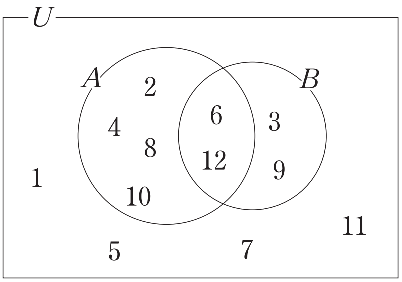
(4)　$\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cap B}=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 9,\ 10\}$

練習

1 から 12 までの自然数全体の集合 U を全体集合とし，その部分集合のうち 2 の倍数全体の集合を A，3 の倍数全体の集合を B とする。このとき，次の集合を求めよ。

(1)　$A\cap B$　　(2)　$A\cup B$　　(3)　$\overline{A}\cap B$　　(4)　$\overline{A}\cap\overline{B}$

ベン図は右図。



(1)　$A\cap B=\{6,\ 12\}$

(2)　$A\cup B=\{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12\}$

(3)　$\overline{A}\cap B=\{3,\ 9\}$

(4)　$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\{1,\ 5,\ 7,\ 11\}$

PART2　命題と条件

例題

x，y を実数とする。次の命題の真偽を調べよ。偽ならば反例を 1 つあげよ。

(1)　$x=1$ ならば $x^2=1$

(2)　$x^2=1$ ならば $x=1$

(3)　$x+y>0$ かつ $xy>0$ ならば $x>0$ かつ $y>0$

(4)　$x \geqq 1$ ならば $x>1$

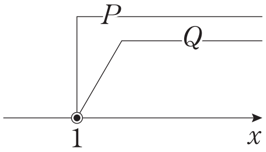
(1)　$x^2=1$ より $x=1$ または $x=-1$　　よって　真

(2)　$x^2=1$ より $x=1$ または $x=-1$　　よって　偽（反例 $x=-1$）

(3)　$xy>0$ のとき「$x>0$ かつ $y>0$」…… ①　または「$x<0$ かつ $y<0$」…… ②

①，②のうち $x+y>0$ を満たすのは①である。よって　真

(4)　$x \geqq 1$ を満たす実数 x 全体の集合を P，$x>1$ を満たす実数 x 全体の集合を Q とすると，$x=1$ は集合 P に含まれるが集合 Q には含まれない。



よって　偽（反例 $x=1$）

練習

x，y を実数とする。次の命題の真偽を調べよ。偽ならば反例を 1 つあげよ。

(1)　$xy=0$ ならば $x=0$ である。

(2)　$-2<x<3$ ならば $-2 \leqq x<5$ である。

(3)　x を整数とするとき，x が 8 の倍数ならば，x は 2 の倍数である。

(4)　$x^2=2x$ ならば $x=2$ である。

(1)　$xy=0$ より $x=0$ または $y=0$　　よって　偽（反例 $y=0$）

(2)　$-2 \leqq x<5$ は $-2<x<3$ を含む。よって　真

(3)　整数 x が 8 の倍数のとき $x=8k$（k は整数）と表すことができる。

このとき $x=8k=2\times 4k$ であり，$4k$ は整数より，x は 2 の倍数である。

よって　真

(4)　$x^2=2x$ より $x^2-2x=0$　$x(x-2)=0$　$x=0$，2

よって　偽（反例 $x=0$）

PART3　必要条件と十分条件，条件の否定

例題

(1)　次の条件 p は条件 q であるための何条件であるか。最も適するものを(ア)~(エ)から選べ。ただし，x，y は実数とする。

(i)　p：$x=3$　　q：$x^2-4x+3=0$

(ii)　p：△ABC が直角三角形　　q：$\angle A=90°$

(iii)　p：$xy=0$　　q：x，y のうち少なくとも１つは０

(iv)　p：$x>0$　　q：$|x|>1$

(ア)　必要十分条件である　　(イ)　必要条件であるが十分条件ではない

(ウ)　十分条件であるが必要条件ではない　　(エ)　必要条件でも十分条件でもない

(2)　次の条件の否定を求めよ。ただし x，y は実数，n は自然数とする。

(i)　$x=1$　　(ii)　$1<x\leqq 2$

(iii)　$x>0$ または $y\leqq 2$　　(iv)　n は奇数または５の倍数

(1)(i)　$x^2-4x+3=0$ より $(x-1)(x-3)=0$　　$x=1,\ 3$

$p\Rightarrow q$ は真

$q\Rightarrow p$ は偽(反例 $x=1$)

したがって　(ウ)

(ii)　$p\Rightarrow q$ は偽(反例 $\angle A=30°$，$\angle B=90°$，$\angle C=60°$)

$q\Rightarrow p$ は真

したがって　(イ)

(iii)　$xy=0$ より $x=0$ または $y=0$

よって p と q は同値である。したがって　(ア)

(iv)　$p\Rightarrow q$ は偽(反例　$x=\dfrac{1}{2}$)

$q\Rightarrow p$ は偽(反例　$x=-2$)

したがって　(エ)

(2)(i)　$x\neq 1$

(ii)　$x\leqq 1$ または $2<x$　$(x\leqq 1,\ 2<x)$

(iii)　$x\leqq 0$ かつ $y>2$

(iv)　n は偶数かつ５の倍数でない

練習

(1)　次の条件 p は条件 q であるための何条件であるか。最も適するものを(ア)～(エ)から選べ。ただし，x，y は実数とする。

(i)　$p：x \neq 0$　　　$q：x^2-3x+2=0$

(ii)　p：四角形 ABCD が正方形　　　q：四角形 ABCD が長方形

(iii)　$p：x=1$　　　$q：xy=1$

(iv)　p：x が 4 の倍数 かつ 6 の倍数　　　q：x が 24 の倍数

(ア)　必要十分条件である　　　(イ)　必要条件であるが十分条件ではない

(ウ)　十分条件であるが必要条件ではない　　　(エ)　必要条件でも十分条件でもない

(2)　次の条件の否定を求めよ。ただし x，y は実数，m，n は自然数とする。

(i)　$x \leqq 5$ または $y=2$　　　(ii)　m，n はともに 3 の倍数

(1)(i)　$x \neq 0$ より，$x=0$ 以外のすべての実数

$x^2-3x+2=0$ より $x=1$ または $x=2$

$p \Rightarrow q$ は偽（反例 $x=3$）

$q \Rightarrow p$ は真

したがって　(イ)

(ii)　$p \Rightarrow q$ は明らかに真

$q \Rightarrow p$ は偽（反例 $\mathrm{AB}=\mathrm{CD}=1$ かつ $\mathrm{BC}=\mathrm{DA}=2$）

したがって　(ウ)

(iii)　$p \Rightarrow q$ は偽（反例 $x=1$，$y=2$）

$q \Rightarrow p$ は偽（反例 $x=\dfrac{1}{2}$，$y=2$）

したがって　(エ)

(iv)　x が 4 の倍数かつ 6 の倍数のとき，x は 12 の倍数である

$p \Rightarrow q$ は偽（反例 $x=12$）

$q \Rightarrow p$ は真

したがって　(イ)

(2)(i)　$x>5$ かつ $y \neq 2$

(ii)　m，n の少なくとも一方は 3 の倍数でない

PART4　逆・裏・対偶，命題の証明

例題

(1)　x，y は実数とする。次の命題の逆・裏・対偶を述べ，その真偽を調べよ。

$$x+y \neq 4 \quad \Rightarrow \quad x \neq 1 \text{ または } y \neq 3$$

(2)　n を整数とする。n^2 が偶数ならば，n は偶数であることを証明せよ。

(3)　$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，$\sqrt{2}-1$ が無理数であることを証明せよ。

(1)　逆：$x \neq 1$ または $y \neq 3 \quad \Rightarrow \quad x+y \neq 4$

偽（反例：$x=2$ かつ $y=2$）

裏：$x+y=4 \quad \Rightarrow \quad x=1$ かつ $y=3$

偽（反例：$x=2$ かつ $y=2$）

対偶：$x=1$ かつ $y=3 \quad \Rightarrow \quad x+y=4$

これは明らかに真

(2)　この命題の対偶は「n が奇数ならば，n^2 は奇数である」。これを示す。

n が奇数のとき，n は整数 k を用いて

$$n=2k+1$$

と表される。このとき

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$$

$2k^2+2k$ は整数であるから，n^2 は奇数である。

よって，対偶が真より，もとの命題も真である。

(3)　$\sqrt{2}-1$ が無理数でないと仮定すると，$\sqrt{2}-1$ は有理数であるから，

$$\sqrt{2}-1=r \ (r \text{ は有理数})$$

とおくと

$$\sqrt{2}=r+1$$

r は有理数より，$r+1$ も有理数である。

よって，$\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって，$\sqrt{2}-1$ は無理数である。

練習

(1)　x，y は実数とする。次の命題の逆・裏・対偶を述べ，その真偽を調べよ。

　　xy が無理数　$\Rightarrow$　x，y の少なくとも一方は無理数

(2)　n を整数とする。n^2 が７の倍数でないならば，n は７の倍数でないことを証明せよ。

(3)　$\sqrt{6}$ が無理数であることを用いて，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。

(1)　逆：x，y の少なくとも一方は無理数　$\Rightarrow$　xy が無理数

　　偽（反例：$x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$）

裏：xy が有理数　$\Rightarrow$　x，y はともに有理数

　　偽（反例：$x=\sqrt{2}$，$y=\sqrt{2}$）

対偶：x，y はともに有理数　$\Rightarrow$　xy が有理数

　　これは明らかに真

(2)　この命題の対偶は「n が７の倍数ならば，n^2 は７の倍数である」。これを示す。

n が７の倍数のとき，n は整数 k を用いて

$$n=7k$$

と表される。このとき

$$n^2=(7k)^2=49k^2=7\cdot 7k^2$$

$7k^2$ は整数であるから，n^2 は７の倍数である。

よって，対偶が真より，もとの命題も真である。

(3)　$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数でないと仮定すると，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は有理数であるから，

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=r \ (r \text{ は有理数})$$

とおくと

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=r^2$$

$$5+2\sqrt{6}=r^2 \qquad \sqrt{6}=\frac{r^2-5}{2}$$

r は有理数より，$\dfrac{r^2-5}{2}$ も有理数である。

よって，$\sqrt{6}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である。

第 5 講　2 次関数とグラフ

PART1　関数とグラフ，1 次関数の最大値・最小値

例題

(1)　関数 $f(x)=3x-1$ について，$f(1)$，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f(a+1)$ の値を求めよ。

(2)　関数 $y=2x+3$ $(-1 \leqq x<1)$ のグラフをかき，値域を求めよ。また，最大値，最小値があればそれを求めよ。

(1)　$f(1)=3\cdot1-1=2$，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=3\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)-1=-\dfrac{5}{2}$，$f(a+1)=3(a+1)-1=3a+2$

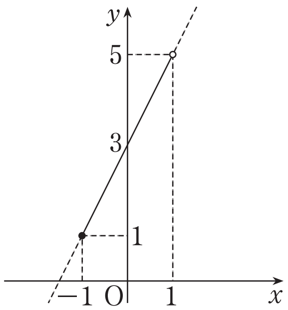
(2)　$y=2x+3$ において

$x=-1$ のとき　$y=1$，$x=1$ のとき　$y=5$

よって，グラフは右図実線部分。

値域は $1 \leqq y<5$

最大値は ない　　$x=-1$ のとき　最小値 1



練習

(1)　関数 $f(x)=2x^2-3x+1$ について，$f(0)$，$f(-2)$，$f(a-2)$ の値を求めよ。

(2)　関数 $y=-\dfrac{1}{2}x-1$ $(-2 \leqq x<2)$ のグラフをかき，値域を求めよ。また，最大値，最小値があればそれを求めよ。

(1)　$f(0)=2\cdot0^2-3\cdot0+1=1$

$f(-2)=2\cdot(-2)^2-3\cdot(-2)+1=15$

$f(a-2)=2(a-2)^2-3(a-2)+1=2a^2-11a+15$

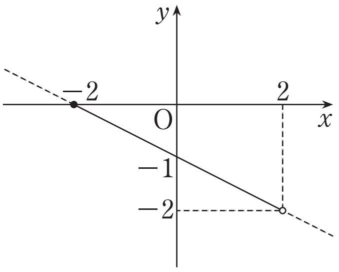
(2)　$y=-\dfrac{1}{2}x-1$ において

$x=-2$ のとき　$y=0$，$x=2$ のとき　$y=-2$

よって，グラフは右図実線部分。

値域は $-2<y \leqq 0$

$x=-2$ のとき 最大値 0　　最小値は　ない



PART2　$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

例題

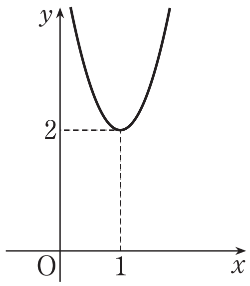
次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=3(x-1)^2+2$　　　(2)　$y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+3$

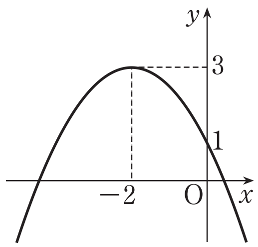
(1)　軸は 直線 $x=1$，頂点は 点 $(1,\ 2)$，グラフは下図

(2)　軸は 直線 $x=-2$，頂点は 点 $(-2,\ 3)$，グラフは下図

(1)



(2)



練習

次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ。

(1)　$y=2(x+2)^2-1$　　　(2)　$y=-(x-1)^2-1$

(3)　$y=x^2+1$　　　(4)　$y=-\frac{1}{3}(x+2)^2$

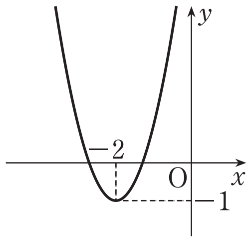
(1)　軸は 直線 $x=-2$，頂点は 点 $(-2,\ -1)$，グラフは下図

(2)　軸は 直線 $x=1$，頂点は 点 $(1,\ -1)$，グラフは下図

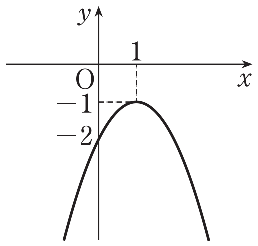
(3)　軸は 直線 $x=0$，頂点は 点 $(0,\ 1)$，グラフは下図

(4)　軸は 直線 $x=-2$，頂点は 点 $(-2,\ 0)$，グラフは下図

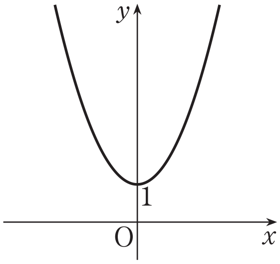
(1)



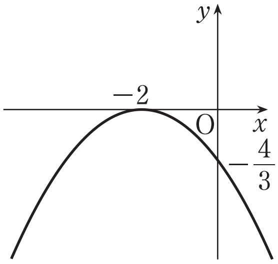
(2)



(3)



(4)



PART3　平方完成と $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

例題

次の２次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。

(1)　$y=x^2+4x+2$　　(2)　$y=-2x^2+2x+1$

(1)　$y=x^2+4x+2=(x+2)^2-4+2=(x+2)^2-2$

軸は 直線 $x=-2$　　頂点は 点 $(-2,\ -2)$

(2)　$y=-2x^2+2x+1=-2(x^2-x)+1$

$$=-2\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}+1=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}+1=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$$

軸は 直線 $x=\frac{1}{2}$　　頂点は　点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$

練習

次の２次関数のグラフの軸と頂点を求めよ。

(1)　$y=x^2+x+1$　　(2)　$y=-3x^2+6x-3$

(3)　$y=2x^2-3x+4$　　(4)　$y=-\frac{1}{3}x^2-x-6$

(1)　$y=x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

軸は　直線 $x=-\frac{1}{2}$　　頂点は 点 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right)$

(2)　$y=-3x^2+6x-3=-3(x^2-2x)-3$

$$=-3\{(x-1)^2-1\}-3=-3(x-1)^2+3-3=-3(x-1)^2$$

軸は　直線 $x=1$　　頂点は 点 $(1,\ 0)$

(3)　$y=2x^2-3x+4=2\left(x^2-\frac{3}{2}x\right)+4$

$$=2\left\{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right\}+4$$

$$=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}+4=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{23}{8}$$

軸は　直線 $x=\dfrac{3}{4}$　　　頂点は　点 $\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{23}{8}\right)$

(4) $y=-\dfrac{1}{3}x^2-x-6=-\dfrac{1}{3}(x^2+3x)-6$

$$=-\frac{1}{3}\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}-6$$

$$=-\frac{1}{3}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}-6=-\frac{1}{3}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{21}{4}$$

軸は　直線 $x=-\dfrac{3}{2}$　　　頂点は　点 $\left(-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{21}{4}\right)$

PART4　放物線の平行移動・対称移動

例題

(1)　放物線 $y=3x^2+6x-2$ を，x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動した放物線の方程式を求めよ。

(2)　放物線 $y=x^2-2x+3$ を，x 軸，y 軸，原点に対してそれぞれ対称移動した放物線の方程式を求めよ。

(1)　$y=3x^2+6x-2=3(x+1)^2-5$

よって，この放物線の頂点は 点 $(-1,\ -5)$

この放物線を，x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると，その頂点は点 $(-3,\ -2)$ に移動する。

よって，求める放物線の方程式は $y=3(x+3)^2-2$ ($=3x^2+18x+25$)

(2)　$y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$……①

よって，放物線①の頂点は 点 $(1,\ 2)$

放物線①を x 軸に関して対称移動すると，その頂点は点 $(1,\ -2)$ に移動し，グラフの上下が反転するため，x^2 の係数は -1 となる。よって，求める放物線の方程式は

$$y=-(x-1)^2-2\ (=-x^2+2x-3)$$

放物線①を y 軸に関して対称移動すると，その頂点は点 $(-1,\ 2)$ に移動する。

よって，求める放物線の方程式は

$$y=(x+1)^2+2\ (=x^2+2x+3)$$

放物線①を原点に関して対称移動すると，その頂点は点 $(-1,\ -2)$ に移動し，グラフの上下が反転するため，x^2 の係数は -1 となる。よって，求める放物線の方程式は

$$y=-(x+1)^2-2\ (=-x^2-2x-3)$$

練習

(1)　放物線 $y=2x^2-2x-1$ を平行移動して放物線 $y=2x^2-8x+4$ に重ねるには，どのように平行移動すればよいか。

(2)　放物線 $y=-x^2-2x$ を，x 軸，y 軸，原点に対してそれぞれ対称移動した放物線の方程式を求めよ。

(1)　$y=2x^2-2x-1=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{3}{2}$……①

放物線①の頂点は 点 $\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)$

$y=2x^2-8x+4=2(x-2)^2-4$……②

放物線②の頂点は　点 $(2,\ -4)$

よって，点 $\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{2}\right)$ が，点 $(2,\ -4)$ に重なるように平行移動すればよい。

したがって，①のグラフを x 軸方向に $\dfrac{3}{2}$，y 軸方向に $-\dfrac{5}{2}$ 平行移動すればよい。

(2)　$y=-x^2-2x=-(x+1)^2+1$……①

よって，放物線①の頂点は 点 $(-1,\ 1)$

放物線①を x 軸に関して対称移動すると，その頂点は点 $(-1,\ -1)$ に移動し，グラフの上下が反転するため，x^2 の係数は 1 となる。よって，求める放物線の方程式は

$$y=(x+1)^2-1\ (=x^2+2x)$$

放物線①を y 軸に関して対称移動すると，その頂点は点 $(1,\ 1)$ に移動する。

よって，求める放物線の方程式は

$$y=-(x-1)^2+1\ (=-x^2+2x)$$

放物線①を原点に関して対称移動すると，その頂点は点 $(1,\ -1)$ に移動し，グラフの上下が反転するため，x^2 の係数は 1 となる。よって，求める放物線の方程式は

$$y=(x-1)^2-1\ (=x^2-2x)$$

第 6 講　2 次関数の最大・最小，2 次関数の決定

PART1　2 次関数の最大・最小

例題

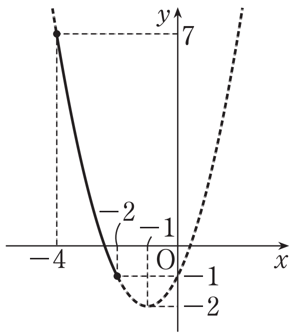
関数 $f(x)=x^2+2x-1$ について，次の定義域における最大値，最小値を求めよ。

(1)　$-4 \leqq x \leqq -2$　　(2)　$-3 \leqq x \leqq 0$　　(3)　$-2 \leqq x \leqq 1$　　(4)　$0 \leqq x \leqq 2$

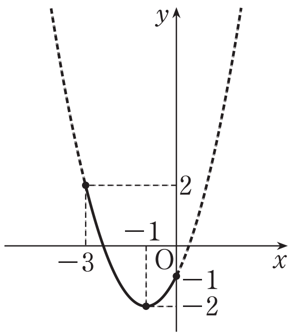
$f(x)=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$

(1)～(4)における関数 $y=f(x)$ のグラフは，下図実線部分。

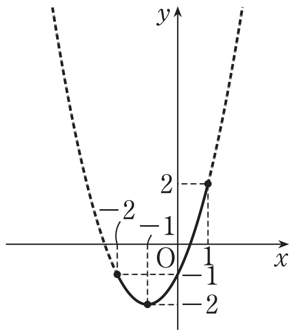
(1)



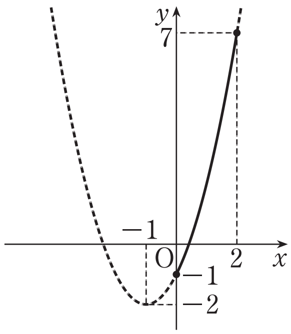
(2)



(3)



(4)



(1)　最大値 $f(-4)=7$　　最小値 $f(-2)=-1$

(2)　最大値 $f(-3)=2$　　最小値 $f(-1)=-2$

(3)　最大値 $f(1)=2$　　最小値 $f(-1)=-2$

(4)　最大値 $f(2)=7$　　最小値 $f(0)=-1$

練習

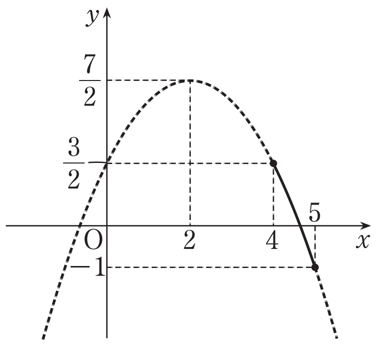
関数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2x+\dfrac{3}{2}$ について，次の定義域における最大値，最小値を求めよ。

(1)　$4\leqq x\leqq 5$　　(2)　$1\leqq x\leqq 4$　　(3)　$0\leqq x\leqq 3$　　(4)　$-1\leqq x\leqq 0$

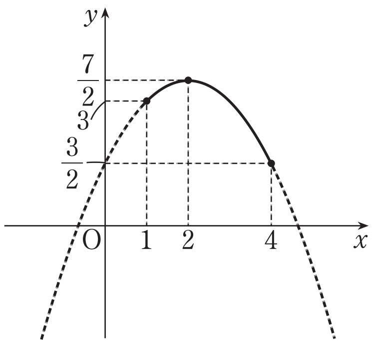
$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{7}{2}$$

(1)～(4)における関数 $y=f(x)$ のグラフは，下図実線部分。

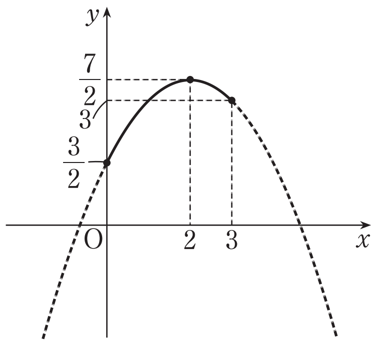
(1)



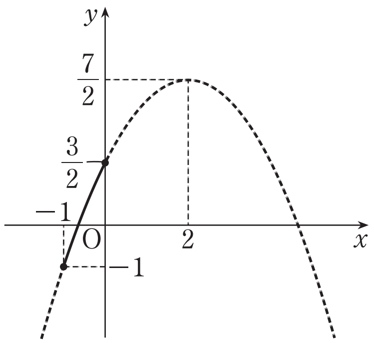
(2)



(3)



(4)



(1)　最大値 $f(4)=\dfrac{3}{2}$　　最小値 $f(5)=-1$

(2)　最大値 $f(2)=\dfrac{7}{2}$　　最小値 $f(4)=\dfrac{3}{2}$

(3)　最大値 $f(2)=\dfrac{7}{2}$　　最小値 $f(0)=\dfrac{3}{2}$

(4)　最大値 $f(0)=\dfrac{3}{2}$　　最小値 $f(-1)=-1$

PART2　2 次関数の最大・最小（定義域の変化）

例題

$a>0$ とする。定義域が $0 \leqq x \leqq a$ である関数 $y=x^2-4x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

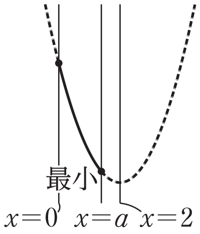
$y=x^2-4x=(x-2)^2-4$ より，グラフの軸は $x=2$

(1)(i)　$0<a<2$ のとき

この関数のグラフは右図(i)の実線部分。

よって，$x=a$ で最小値 a^2-4a をとる。

(i)

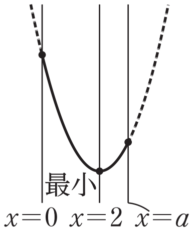


(ii)　$2 \leqq a$ のとき

この関数のグラフは右図(ii)の実線部分。

よって，$x=2$ で最小値 -4 をとる。

(ii)



(i)，(ii)より

$0<a<2$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2-4a

$2 \leqq a$ のとき　$x=2$ で最小値 -4

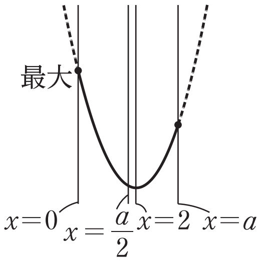
(2)　定義域 $0 \leqq x \leqq a$ の中央は $x=\dfrac{a}{2}$

(iii)　$\dfrac{a}{2}<2$ つまり $0<a<4$ のとき

この関数のグラフは右図(iii)の実線部分。

よって，$x=0$ で最大値 0 をとる。

(iii)

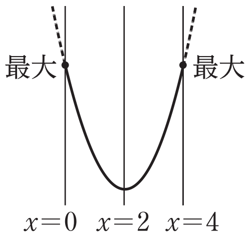


(iv)　$\dfrac{a}{2}=2$　つまり $a=4$ のとき

この関数のグラフは右図(iv)の実線部分。

よって，$x=0$，4 で最大値 0 をとる。

(iv)

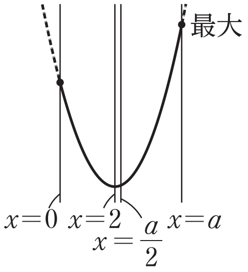


(v)　$2<\dfrac{a}{2}$　つまり $a>4$ のとき

この関数のグラフは右図(v)の実線部分。

よって，$x=a$ で最大値 a^2-4a をとる。

(v)



(iii)～(v)より

$0<a<4$ のとき　$x=0$ で最大値 0

$a=4$ のとき　$x=0$，4 で最大値 0

$a>4$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-4a

練習

$a>1$ とする。定義域が $1 \leqq x \leqq a$ である関数 $y=x^2-6x-5$ について, 次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

$y=x^2-6x-5=(x-3)^2-14$ より，グラフの軸は $x=3$

(1)(i)　$1<a<3$ のとき

この関数のグラフは右図(i)の実線部分。

よって，$x=a$ で最小値 a^2-6a-5 をとる。

(ii)　$3 \leqq a$ のとき

この関数のグラフは右図(ii)の実線部分。

よって，$x=3$ で最小値 -14 をとる。

(i), (ii)より

$1<a<3$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2-6a-5

$3 \leqq a$ のとき　$x=3$ で最小値 -14

(2)　定義域 $1 \leqq x \leqq a$ の中央は $x=\dfrac{1+a}{2}$

(iii)　$\dfrac{1+a}{2}<3$ つまり $1<a<5$ のとき

この関数のグラフは右図(iii)の実線部分。

よって，$x=1$ で最大値 -10 をとる。

(iv)　$\dfrac{1+a}{2}=3$ つまり $a=5$ のとき

この関数のグラフは右図(iv)の実線部分。

よって，$x=1$，5 で最大値 -10 をとる。

(v)　$3<\dfrac{1+a}{2}$　つまり $a>5$ のとき

この関数のグラフは右図(v)の実線部分。

よって，$x=a$ で最大値 a^2-6a-5 をとる。

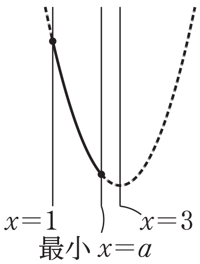
(iii)～(v)より

$1<a<5$ のとき　$x=1$ で最大値 -10

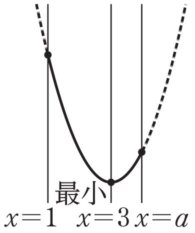
$a=5$ のとき　$x=1$，5 で最大値 -10

$a>5$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-6a-5

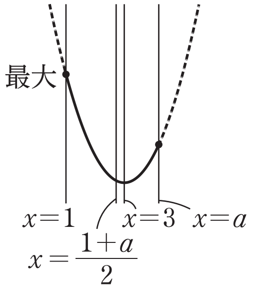
(i)



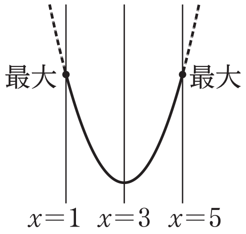
(ii)



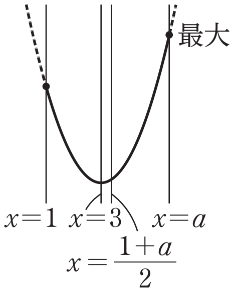
(iii)



(iv)



(v)



PART3　２次関数の最大・最小（軸の移動）

例題

a は定数とする。定義域が $0 \leqq x \leqq 2$ である関数 $f(x)=x^2-2ax+1$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　(2)　最大値を求めよ。

$f(x)=(x-a)^2-a^2+1$ より，グラフの軸は $x=a$

(1)(i)　$a<0$ のとき

この関数のグラフは下図(i)の実線部分。よって，最小値は $f(0)=1$

(ii)　$0 \leqq a \leqq 2$ のとき

この関数のグラフは下図(ii)の実線部分。よって，最小値は $f(a)=-a^2+1$

(iii)　$2<a$ のとき

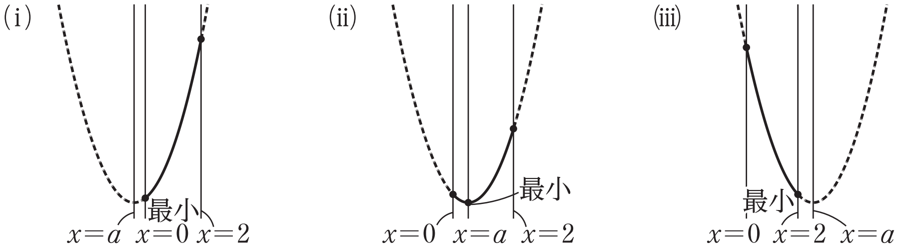
この関数のグラフは下図(iii)の実線部分。よって，最小値は $f(2)=-4a+5$

(i)～(iii)より

$a<0$ のとき　$x=0$ で最小値 1

$0 \leqq a \leqq 2$ のとき　$x=a$ で最小値 $-a^2+1$

$2<a$ のとき　$x=2$ で最小値 $-4a+5$



(2)　定義域 $0 \leqq x \leqq 2$ の中央は $x=1$

(iv)　$a<1$ のとき

この関数のグラフは下図(iv)の実線部分。よって，最大値は $f(2)=-4a+5$

(v)　$a=1$ のとき

この関数のグラフは下図(v)の実線部分。よって，最大値は $f(0)=f(2)=1$

(vi)　$1<a$ のとき

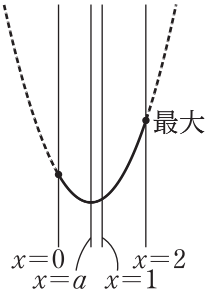
この関数のグラフは下図(vi)の実線部分。よって，最大値は $f(0)=1$

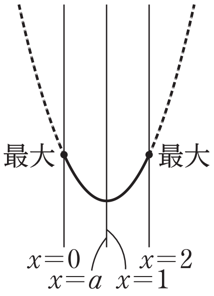
(iv)～(vi)より

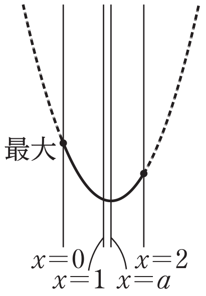
$a<1$ のとき　$x=2$ で最大値 $-4a+5$

$a=1$ のとき　$x=0,\ 2$ で最大値 1

$1<a$ のとき　$x=0$ で最大値 1

(iv)


(v)


(vi)


練習

a は定数とする。定義域が $0\leqq x\leqq 4$ である関数 $f(x)=-2x^2+4ax+4a+1$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値を求めよ。　　　(2)　最大値を求めよ。

$f(x)=-2x^2+4ax+4a+1=-2(x-a)^2+2a^2+4a+1$ より，グラフの軸は $x=a$

(1)　定義域 $0\leqq x\leqq 4$ の中央は $x=2$

(i)　$a<2$ のとき

この関数のグラフは下図(i)の実線部分。よって，最小値は $f(4)=20a-31$

(ii)　$a=2$ のとき

この関数のグラフは下図(ii)の実線部分。よって，最小値は $f(0)=f(4)=9$

(iii)　$2<a$ のとき

この関数のグラフは下図(iii)の実線部分。よって，最小値は $f(0)=4a+1$

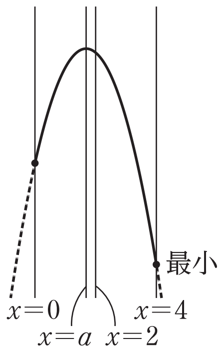
(i)～(iii)より

$a<2$ のとき　$x=4$ で最小値 $20a-31$

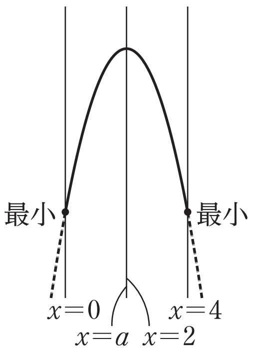
$a=2$ のとき　$x=0,\ 4$ で最小値 9

$2<a$ のとき　$x=0$ で最小値 $4a+1$

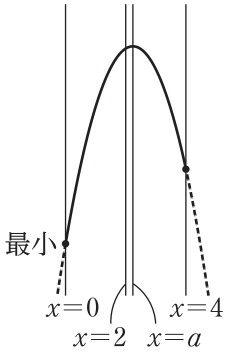
(ⅰ)



(ⅱ)



(ⅲ)



(2)(ⅳ)　$a<0$ のとき

この関数のグラフは下図(ⅳ)の実線部分。よって，最大値は $f(0)=4a+1$

(ⅴ)　$0\leqq a\leqq 4$ のとき

この関数のグラフは下図(ⅴ)の実線部分。よって，最大値は $f(a)=2a^2+4a+1$

(ⅵ)　$4<a$ のとき

この関数のグラフは下図(ⅵ)の実線部分。よって，最大値は $f(4)=20a-31$

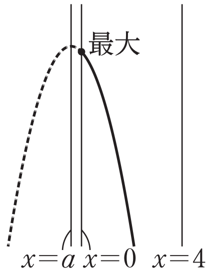
(ⅳ)～(ⅵ)より

$a<0$ のとき　$x=0$ で最大値 $4a+1$

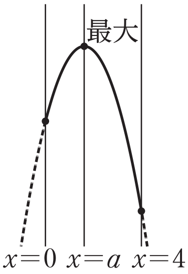
$0\leqq a\leqq 4$ のとき　$x=a$ で最大値 $2a^2+4a+1$

$4<a$ のとき　$x=4$ で最大値 $20a-31$

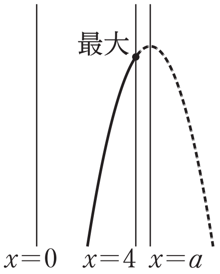
(ⅳ)



(ⅴ)



(ⅵ)



PART4　2次関数の決定

例題

次の条件を満たす放物線をグラフにもつ2次関数を求めよ。

(1)　頂点が点 (2, 1) で，点 (1, 4) を通る。

(2)　放物線 $y=-2x^2$ を平行移動したもので，2点 (1, 1), (2, 3) を通る。

(3)　3点 (−1, −3), (1, 5), (2, 3) を通る。

(1)　頂点が点 (2, 1) であることより，求める2次関数の式は

$$y=a(x-2)^2+1$$

と表すことができる。グラフが点 (1, 4) を通るから

$$4=a(1-2)^2+1 \qquad a=3$$

よって，求める2次関数は　$y=3(x-2)^2+1$

(2)　放物線 $y=-2x^2$ を平行移動したものであることより，求める2次関数の式は

$$y=-2x^2+bx+c$$

と表すことができる。グラフが2点 (1, 1), (2, 3) を通るから

$$\begin{cases}1=-2+b+c\\3=-8+2b+c\end{cases} \quad \text{これを解いて} \begin{cases}b=8\\c=-5\end{cases}$$

よって，求める2次関数は $y=-2x^2+8x-5$

(3)　求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく。

グラフが3点 (−1, −3), (1, 5), (2, 3) を通るから

$$\begin{cases}-3=a-b+c \quad \cdots\cdots①\\5=a+b+c \quad \cdots\cdots②\\3=4a+2b+c \quad \cdots\cdots③\end{cases}$$

② − ①より　$2b=8$　　$b=4$　……④

④を①に代入して整理すると $a+c=1$　……⑤

④を③に代入して整理すると $4a+c=-5$　……⑥

⑤, ⑥より $a=-2$, $c=3$　　④より $b=4$

よって，求める2次関数は　$y=-2x^2+4x+3$

(別解)

③ − ①より　$3a+3b=6$　よって $a+b=2$　……⑦

③－②より　$3a+b=-2$　……⑧

⑦，⑧より $a=-2$，$b=4$　　このとき①より $c=3$

よって，求める２次関数は　$y=-2x^2+4x+3$

練習

次の条件を満たす放物線をグラフにもつ２次関数を求めよ。

(1)　$x=-2$ のとき最大値５をとり，点 $(2,\ -11)$ を通る。

(2)　軸が直線 $x=-1$ で，２点 $(-3,\ 3)$，$(0,\ -3)$ を通る。

(3)　３点 $(1,\ 0)$，$(-2,\ 0)$，$(-3,\ -2)$ を通る。

(1)　$x=-2$ のとき最大値５をとることより，求める２次関数の式は

$$y=a(x+2)^2+5$$

と表すことができる。グラフが点 $(2,\ -11)$ を通るから

$$-11=a(2+2)^2+5 \qquad a=-1$$

よって，求める２次関数は　$y=-(x+2)^2+5$

(2)　軸が $x=-1$ であることより，求める２次関数の式は

$$y=a(x+1)^2+q$$

と表すことができる。グラフが２点 $(-3,\ 3)$，$(0,\ -3)$ を通るから

$$\begin{cases}3=4a+q\\-3=a+q\end{cases}\quad \text{これを解いて}\quad \begin{cases}a=2\\q=-5\end{cases}$$

よって，求める２次関数は $y=2(x+1)^2-5$

(3)　求める２次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく。

グラフが３点 $(1,\ 0)$，$(-2,\ 0)$，$(-3,\ -2)$ を通るから

$$\begin{cases}0=a+b+c & \cdots\cdots① \\ 0=4a-2b+c & \cdots\cdots② \\ -2=9a-3b+c & \cdots\cdots③\end{cases}$$

②－①より　$3a-3b=0$　　$a=b$　……④

③－②より　$5a-b=-2$　……⑤

④，⑤より　$a=-\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{1}{2}$　　このとき①より $c=1$

よって，求める２次関数は　$y=-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x+1$

（別解）

グラフが 2 点 $(1,\ 0)$，$(-2,\ 0)$ を通ることより，求める 2 次関数の式は

$$y=a(x-1)(x+2)$$

と表すことができる。さらに，点 $(-3,\ -2)$ を通ることから

$$-2=a\cdot(-4)\cdot(-1) \qquad a=-\frac{1}{2}$$

よって，求める 2 次関数は　$y=-\dfrac{1}{2}(x-1)(x+2)$

第 7 講　2 次方程式・2 次不等式

PART1　2 次方程式の解法，実数解の個数

例題

(1)　次の 2 次方程式の実数解の個数を調べよ。また，実数解をもつ場合はその実数解を求めよ。

(i)　$x^2+3x+1=0$　　(ii)　$9x^2-6x+1=0$　　(iii)　$3x^2-5x+3=0$

(2)　2 次方程式 $2x^2-x-m+2=0$ が実数解をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(1)　与えられた方程式の判別式を D とする。

(i)　$D=3^2-4\cdot1\cdot1=9-4=5>0$　より 2 個

実数解は $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$

(ii)　$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-9\cdot1=0$　より 1 個

実数解は $x=-\dfrac{-6}{2\cdot9}=-\dfrac{-3}{9}=\dfrac{1}{3}$

(iii)　$D=(-5)^2-4\cdot3\cdot3=25-36=-11<0$　より 0 個

(2)　この方程式の判別式を D とすると

$$D=(-1)^2-4\cdot2\cdot(-m+2)=8m-15$$

実数解をもつための条件は $D\geqq0$

よって $8m-15\geqq0$　より $m\geqq\dfrac{15}{8}$

練習

(1)　次の 2 次方程式の実数解の個数を調べよ。また，実数解をもつ場合はその実数解を求めよ。

(i)　$x^2-7x+8=0$　　(ii)　$-x^2+x-4=0$　　(iii)　$3x^2-2\sqrt{3}\,x+1=0$

(2)　2 次方程式 $4x^2-(m+2)x+m-1=0$ が重解をもつとき，定数 m の値を求めよ。また，そのときの重解を求めよ。

(1)　与えられた方程式の判別式を D とする。

(i)　$D=(-7)^2-4\cdot1\cdot8=49-32=17>0$　より２個

実数解は $x=\dfrac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot1\cdot8}}{2\cdot1}=\dfrac{7\pm\sqrt{17}}{2}$

(ii)　$-x^2+x-4=0$　より　$x^2-x+4=0$

$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot4=1-16=-15<0$　より０個

(iii)　$\dfrac{D}{4}=(-\sqrt{3})^2-3\cdot1=0$　より１個

実数解は $x=-\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\cdot3}=-\dfrac{-\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(2)　この方程式の判別式を D とすると

$$D=\{-(m+2)\}^2-4\cdot4\cdot(m-1)=m^2-12m+20$$

重解をもつための条件は $D=0$

よって　$m^2-12m+20=0$　　$(m-2)(m-10)=0$　　$m=2,\ 10$

また，重解は $x=-\dfrac{-(m+2)}{2\cdot4}=\dfrac{m+2}{8}$ より

$m=2$ のとき 重解 $x=\dfrac{1}{2}$，　$m=10$ のとき 重解 $x=\dfrac{3}{2}$

PART2　2次関数のグラフと x 軸の共有点

例題

(1)　次の2次関数のグラフと x 軸との位置関係を求めよ。また，共有点をもつ場合は，その座標を求めよ。

(i)　$y=x^2-4x+3$　　(ii)　$y=-4x^2-12x-9$　　(iii)　$y=x^2+3x+3$

(2)　2次関数 $y=x^2+4x+k$ のグラフと x 軸との共有点の個数は，定数 k の値によってどのように変わるか。

(1)(i)　2次方程式 $x^2-4x+3=0$ の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot3=1>0$　　よって　異なる2点で交わる

共有点の x 座標は，2次方程式 $x^2-4x+3=0$ の実数解である。

$(x-1)(x-3)=0$　　$x=1,\ 3$

したがって，求める共有点の座標は $(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$

(ii)　2次方程式 $-4x^2-12x-9=0$ の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=(-6)^2-(-4)\cdot(-9)=0$　　よって　接する

共有点の x 座標は，2次方程式 $-4x^2-12x-9=0$ の実数解である。

$4x^2+12x+9=0$　　$(2x+3)^2=0$　　$x=-\dfrac{3}{2}$

したがって，求める共有点の座標は $\left(-\dfrac{3}{2},\ 0\right)$

(iii)　2次方程式 $x^2+3x+3=0$ の判別式を D とすると

$D=3^2-4\cdot1\cdot3=-3<0$　　よって　共有点をもたない

(2)　2次関数 $y=x^2+4x+k$ のグラフと x 軸の共有点の個数は，2次方程式 $x^2+4x+k=0$ の実数解の個数と一致する。この方程式の判別式を D とすると

$\dfrac{D}{4}=2^2-1\cdot k=4-k$

よって，共有点の個数は

$D>0$ つまり $4-k>0$ より $k<4$ のとき2個

$D=0$ つまり $4-k=0$ より $k=4$ のとき1個

$D<0$ つまり $4-k<0$ より $k>4$ のとき0個

練習

(1)　次の２次関数のグラフと x 軸との位置関係を求めよ。また，共有点をもつ場合は，その座標を求めよ。

(i)　$y=x^2-x-4$　　(ii)　$y=x^2+5x+7$　　(iii)　$y=-\frac{1}{2}x^2+4x-8$

(2)　２次関数 $y=-x^2+2x+k+3$ のグラフと x 軸の位置関係が次のようになるとき，k のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。

(i)　共有点をもたない　　(ii)　共有点をもつ

(1)(i)　２次方程式 $x^2-x-4=0$ の判別式を D とすると

$D=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-4)=17>0$　　よって　異なる２点で交わる

共有点の x 座標は，２次方程式 $x^2-x-4=0$ の実数解である。

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$$

したがって，求める共有点の座標は $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2},\ 0\right)$，$\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2},\ 0\right)$

(ii)　２次方程式 $x^2+5x+7=0$ の判別式を D とすると

$D=5^2-4\cdot1\cdot7=-3<0$　　よって　共有点をもたない

(iii)　２次方程式 $-\frac{1}{2}x^2+4x-8=0$ の判別式を D とすると

$\frac{D}{4}=2^2-\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-8)=0$　　よって　接する

共有点の x 座標は，２次方程式 $-\frac{1}{2}x^2+4x-8=0$ の実数解である。

$x^2-8x+16=0$　　$(x-4)^2=0$　　$x=4$

したがって，求める共有点の座標は $(4,\ 0)$

(2)　２次関数 $y=-x^2+2x+k+3$ のグラフと x 軸の共有点の個数は，２次方程式 $-x^2+2x+k+3=0$ の実数解の個数と一致する。この方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=1^2-(-1)\cdot(k+3)=k+4$$

(i)　共有点をもたないのは $D<0$ のときである

よって $k+4<0$　　$k<-4$

(ii)　共有点をもつのは $D\geqq0$ のときである

よって $k+4\geqq0$　　$k\geqq-4$

PART3　２次不等式と２次関数のグラフ

例題

次の２次不等式を解け。

(1)　$x^2+x-2>0$　　(2)　$x^2-3x-2\geqq 0$

(3)　$3x^2-10x+3<0$　　(4)　$-x^2+x+1\geqq 0$

(1)　$x^2+x-2=0$ を解くと $(x+2)(x-1)=0$　$x=-2,\ 1$

よって，不等式の解は $x<-2,\ 1<x$

(2)　$x^2-3x-2=0$ を解くと $x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

よって，不等式の解は $x\leqq\dfrac{3-\sqrt{17}}{2},\ \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\leqq x$

(3)　$3x^2-10x+3=0$ を解くと $(3x-1)(x-3)=0$　　$x=\dfrac{1}{3},\ 3$

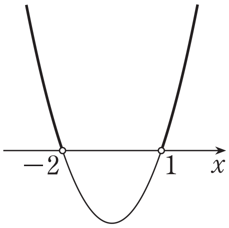
よって，不等式の解は $\dfrac{1}{3}<x<3$

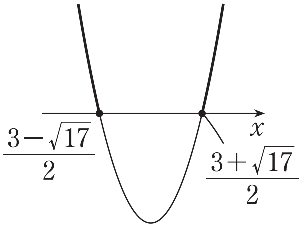
(4)　$-x^2+x+1\geqq 0$ の両辺に -1 をかけて　$x^2-x-1\leqq 0$

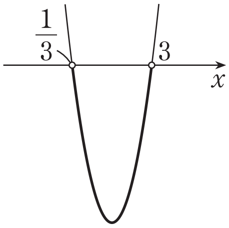
$x^2-x-1=0$ を解くと $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

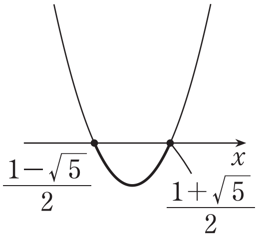
よって，不等式の解は $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\leqq x\leqq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

(参考図)

(1)


(2)


(3)


(4)


練習

次の２次不等式を解け。

(1)　$x^2-7x+10>0$　　(2)　$4x^2-5x-3<0$

(3)　$-x^2+4x+7\geqq 0$　　(4)　$x^2\geqq 8$

(1)　$x^2-7x+10>0$ より $(x-2)(x-5)>0$

よって，不等式の解は　$x<2$，$5<x$

(2)　$4x^2-5x-3=0$ を解くと $x=\dfrac{5\pm\sqrt{73}}{8}$

よって，不等式の解は $\dfrac{5-\sqrt{73}}{8}<x<\dfrac{5+\sqrt{73}}{8}$

(3)　$-x^2+4x+7\geqq 0$ より $x^2-4x-7\leqq 0$

$x^2-4x-7=0$ を解くと $x=2\pm\sqrt{11}$

よって，不等式の解は $2-\sqrt{11}\leqq x\leqq 2+\sqrt{11}$

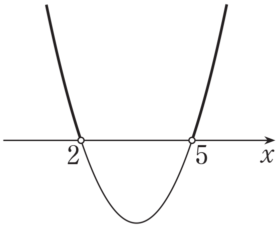
(4)　$x^2\geqq 8$ より $x^2-8\geqq 0$

$x^2-8=0$ を解くと $x^2=8$　　$x=\pm 2\sqrt{2}$

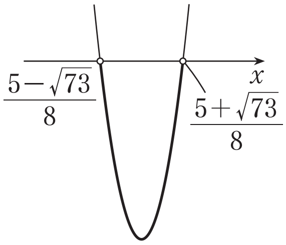
よって $x^2\geqq 8$ の解は $x\leqq -2\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}\leqq x$

（参考図）

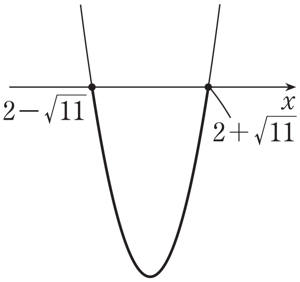
(1)



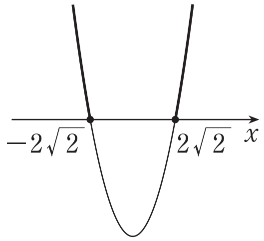
(2)



(3)



(4)



PART4　2次不等式（x軸と接する，共有点をもたない）

例題

(1)　次の2次不等式を解け。

(i)　$(x-2)^2>0$　　(ii)　$(x-2)^2\geqq 0$

(iii)　$(x-2)^2<0$　　(iv)　$(x-2)^2\leqq 0$

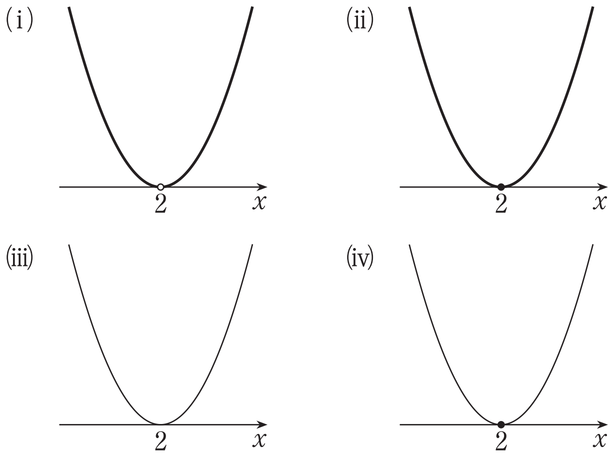
(2)　次の2次不等式を解け。

(i)　$x^2-2x+3<0$　　(ii)　$2x^2+5x+4\geqq 0$

(1)(i)　2以外のすべての実数　　(ii)　すべての実数

(iii)　解はない　　(iv)　$x=2$

（参考図）



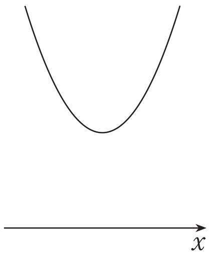
(2)(i)　2次方程式 $x^2-2x+3=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot 3=-2<0$$

x^2 の係数は正であるから，不等式の解は ない

（別解）　$x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0$

よって，不等式の解は ない



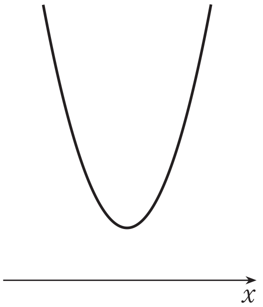
(ii)　2 次方程式 $2x^2+5x+4=0$ の判別式を D とすると

$$D=5^2-4\cdot2\cdot4=-7<0$$

x^2 の係数は正であるから，不等式の解は すべての実数

（別解）　$2x^2+5x+4=2\left(x+\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}>0$

よって，不等式の解は すべての実数



練習

次の 2 次不等式を解け。

(1)　$4x^2+4x+1>0$　　(2)　$-x^2+6x-9\geqq0$

(3)　$x^2-2x+5>0$　　(4)　$-x^2-x-1\geqq0$

(1)　$4x^2+4x+1>0$ より $(2x+1)^2>0$　　よって $x=-\dfrac{1}{2}$ 以外のすべての実数

(2)　$-x^2+6x-9\geqq0$ より $x^2-6x+9\leqq0$　　$(x-3)^2\leqq0$　よって $x=3$

(3)　$x^2-2x+5=0$ の判別式を D とすると $\dfrac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot5=-4<0$

x^2 の係数は正であるから，不等式の解は すべての実数

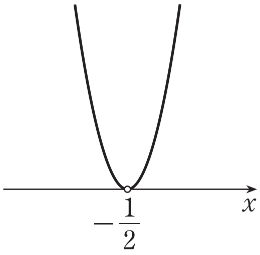
(4)　$-x^2-x-1\geqq0$ より $x^2+x+1\leqq0$

$x^2+x+1=0$ の判別式を D とすると　$D=1^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$

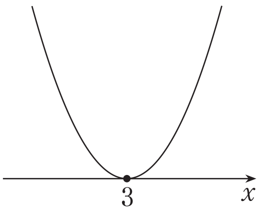
x^2 の係数は正であるから，不等式 $x^2+x+1\leqq0$ すなわち $-x^2-x-1\geqq0$ の 解は　ない

（参考図）

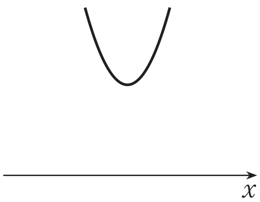
(1)



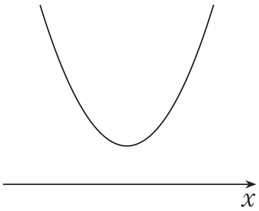
(2)



(3)



(4)



第 8 講　2次不等式の利用

PART1　2次関数のグラフと2次方程式・2次不等式

例題

(1)　2次関数 $y=x^2+mx+m$ のグラフが x 軸と共有点をもつとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

(2)　すべての実数 x について $x^2-(k-1)x+3>0$ が成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ。

(1)　2次方程式 $x^2+mx+m=0$ の判別式を D とすると，

$$D=m^2-4\cdot1\cdot m=m^2-4m=m(m-4)$$

グラフが x 軸と共有点をもつのは $D\geqq0$ のときであるから

$m(m-4)\geqq0$　　　よって $m\leqq0$，$4\leqq m$

(2)　2次関数 $y=x^2-(k-1)x+3$ のグラフは下に凸の放物線である。よって，すべての実数 x について不等式が成り立つのは，このグラフが x 軸と共有点をもたないときである。したがって，2次方程式 $x^2-(k-1)x+3=0$ の判別式を D とすると

$$D=\{-(k-1)\}^2-4\cdot1\cdot3=k^2-2k-11<0$$

よって　$1-2\sqrt{3}<k<1+2\sqrt{3}$

練習

(1)　2次関数 $y=-x^2+(m-1)x-m+1$ のグラフが次の条件を満たすように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(i)　x 軸と共有点をもつ　　　(ii)　x 軸と共有点をもたない

(2)　すべての実数 x について $-x^2+2ax-a-2<0$ が成り立つように，定数 a の値の範囲を定めよ。

(1)　2次方程式 $-x^2+(m-1)x-m+1=0$ の判別式を D とすると，

$$D=(m-1)^2-4\cdot(-1)\cdot(-m+1)=m^2-6m+5=(m-1)(m-5)$$

(i)　グラフが x 軸と共有点をもつのは $D\geqq0$ のときであるから

$(m-1)(m-5)\geqq0$　　よって，$m\leqq1$，$5\leqq m$

(ii)　グラフが x 軸と共有点をもたないのは $D<0$ のときであるから

$(m-1)(m-5)<0$　　よって，$1<m<5$

(2)　2 次関数 $y=-x^2+2ax-a-2$ のグラフは上に凸の放物線である。よって，すべての実数 x について不等式が成り立つのは，このグラフが x 軸と共有点をもたないときである。したがって，2 次方程式 $-x^2+2ax-a-2=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=a^2-(-1)\cdot(-a-2)=a^2-a-2=(a+1)(a-2)<0$$

よって　$-1<a<2$

PART2　連立不等式

例題

2 つの 2 次方程式 $x^2-x+a=0$，$x^2+2ax-3a+4=0$ について，次の条件を満たす a の値の範囲を求めよ。

(1)　ともに異なる 2 つの実数解をもつ　(2)　少なくとも一方が異なる 2 つの実数解をもつ

$x^2-x+a=0$ ……①　$x^2+2ax-3a+4=0$ ……②の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると

$$D_1=1-4a$$

$$\frac{D_2}{4}=a^2-1\cdot(-3a+4)=a^2+3a-4=(a+4)(a-1)$$

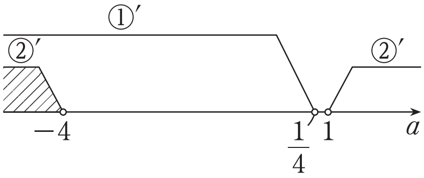
(1)　①，②がともに異なる 2 つの実数解をもつ条件は $D_1>0$ かつ $D_2>0$

$D_1>0$ より $1-4a>0$　$a<\frac{1}{4}$ ……①′

$D_2>0$ より $(a+4)(a-1)>0$　$a<-4$，$1<a$ ……②′

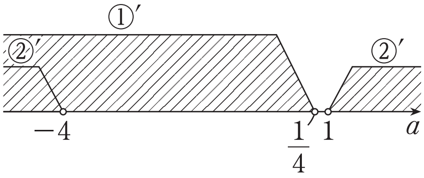
①′ と ②′ の共通範囲を求めて

$a<-4$



(2)　①，②の少なくとも一方が異なる 2 つの実数解をもつ条件は $D_1>0$ または $D_2>0$

①′ と ②′ の範囲を合わせて　$a<\frac{1}{4}$，$1<a$



練習

2 つの 2 次方程式 $x^2+(a+1)x-1+a^2=0$，$x^2-(1-a)x+(a+1)^2=0$ について，次の条件を満たす a の値の範囲を求めよ。

(1)　ともに実数解をもつ　(2)　一方のみが実数解をもつ

$x^2+(a+1)x-1+a^2=0$ ……①　$x^2-(1-a)x+(a+1)^2=0$ ……②の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると

$$D_1=(a+1)^2-4\cdot1\cdot(-1+a^2)=-3a^2+2a+5=-(3a-5)(a+1)$$

$$D_2=\{-(1-a)\}^2-4\cdot1\cdot(a+1)^2=-3a^2-10a-3=-(3a+1)(a+3)$$

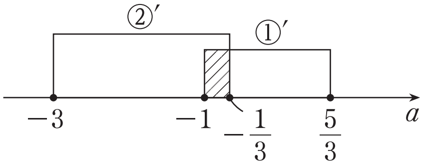
(1)　①，②がともに実数解をもつ条件は $D_1 \geqq 0$ かつ $D_2 \geqq 0$

$D_1 \geqq 0$ より $-(3a-5)(a+1) \geqq 0$　　$(3a-5)(a+1) \leqq 0$　　$-1 \leqq a \leqq \dfrac{5}{3}$　……①′

$D_2 \geqq 0$ より $-(3a+1)(a+3) \geqq 0$　　$(3a+1)(a+3) \leqq 0$　　$-3 \leqq a \leqq -\dfrac{1}{3}$　……②′

①′ と ②′ の共通範囲を求めて

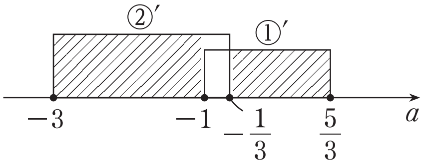
$$-1 \leqq a \leqq -\frac{1}{3}$$



(2)　①，②の一方のみが実数解をもつ条件は $D_1 \geqq 0$ か $D_2 \geqq 0$ のいずれか一方のみが成り立つときである。

よって，①′ と ②′ のいずれか一方のみが成り立つ範囲を求めて

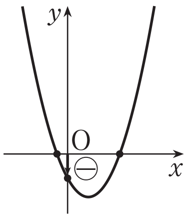
$$-3 \leqq a < -1,\ -\frac{1}{3} < a \leqq \frac{5}{3}$$



PART3　2 次関数のグラフと x 軸の共有点の位置

例題

2 次関数 $y=2x^2-3x-a$ のグラフが x 軸の正の部分と負の部分で交わるように，定数 a の値の範囲を定めよ。



$f(x)=2x^2-3x-a$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線である。

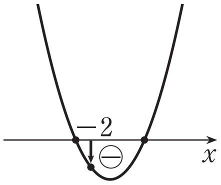
$y=f(x)$ のグラフが x 軸の正の部分と負の部分で交わるための条件は $f(0)<0$ である。

$f(0)=-a$ より $-a<0$

よって　　$a>0$

練習

2 次関数 $y=x^2-mx+m+3$ のグラフが x 軸の $x>-2$ の部分と $x<-2$ の部分で交わるような定数 m の値の範囲を求めよ。



$f(x)=x^2-mx+m+3$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線である。

$y=f(x)$ のグラフが x 軸の $x>-2$ の部分と $x<-2$ の部分で交わるための条件は $f(-2)<0$ である。

$f(-2)=(-2)^2-m\cdot(-2)+m+3=3m+7$ より　$3m+7<0$

よって　　$m<-\dfrac{7}{3}$

PART4　2次方程式の解の存在範囲

例題

2次方程式 $x^2+2(a-2)x+a=0$ が異なる2つの正の解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$f(x)=x^2+2(a-2)x+a$ とおく。

$f(x)=\{x+(a-2)\}^2-a^2+5a-4$ より，軸の式は $x=-a+2$

また，2次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(a-2)^2-1\cdot a=a^2-5a+4=(a-1)(a-4)$$

2次方程式 $f(x)=0$ が異なる2つの正の解をもつのは，

2次関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の $x>0$ の部分が

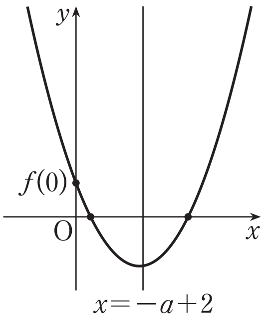
異なる2点で交わるときである。それは

$D>0$ ……①

($f(x)$のグラフの軸)>0 ……②

$f(0)>0$ ……③

が同時に成り立つときである。

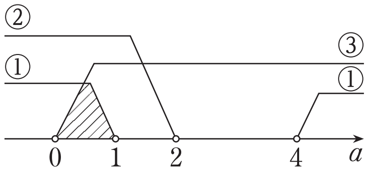


①より　$(a-1)(a-4)>0$　　$a<1,\ 4<a$

②より　$-a+2>0$　　$a<2$

③より　$a>0$

①，②，③の共通範囲を求めて　　$0<a<1$



練習

2次方程式 $x^2+2ax+2a+3=0$ が2より小さい異なる2つの解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

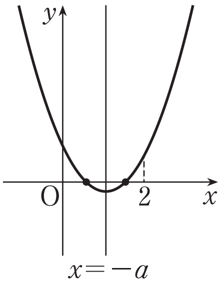
$f(x)=x^2+2ax+2a+3$ とおく。

$f(x)=(x+a)^2-a^2+2a+3$ より，軸の式は $x=-a$

また，2次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=a^2-1\cdot(2a+3)=a^2-2a-3=(a+1)(a-3)$$

2 次方程式 $f(x)=0$ が 2 より小さい異なる 2 つの解をもつのは，
2 次関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の $x<2$ の部分が
異なる 2 点で交わるときである。それは



$D>0$　……①

($f(x)$のグラフの軸)<2　……②

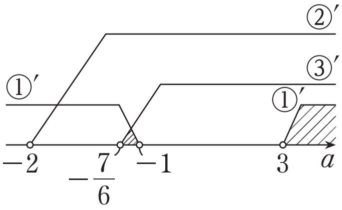
$f(2)>0$　……③

が同時に成り立つときである。

①より　$(a+1)(a-3)>0$　　$a<-1,\ 3<a$　……①′

②より　$-a<2$　　$a>-2$　……②′

③より　$2^2+2a\cdot 2+2a+3>0$　　$a>-\dfrac{7}{6}$　……③′



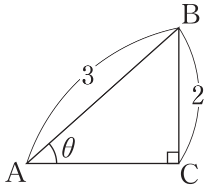
①′，②′，③′の共通部分を求めて　$-\dfrac{7}{6}<a<-1,\ 3<a$

第 9 講　鋭角の三角比

PART1　直角三角形と三角比

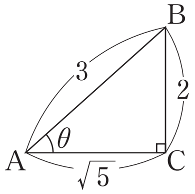
例題

右の図において，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値をそれぞれ求めよ。



三平方の定理により　$AC=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

よって $\sin\theta=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{2}{3}$，$\cos\theta=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan\theta=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

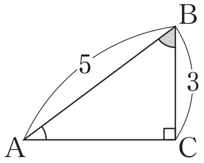


練習

右の図において，次の値を求めよ。

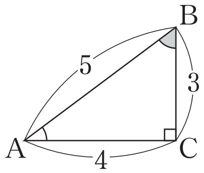
(1)　$\sin A$，$\cos A$，$\tan A$

(2)　$\sin B$，$\cos B$，$\tan B$



三平方の定理により　$AC=\sqrt{5^2-3^2}=4$

(1)　$\sin A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{3}{5}$，$\cos A=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{4}{5}$，$\tan A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{3}{4}$



(2)　$\sin B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{4}{5}$，$\cos B=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{3}{5}$，$\tan B=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{4}{3}$

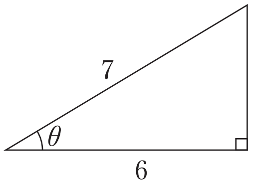
PART2　有名角の三角比，三角比の表

例題

(1)　次の表の空欄に適する値を入れよ。

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
30°			
45°			
60°			

(2)　右の図において，θ のおよその大きさを，
下の三角比の値を用いて求めよ。



θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
⋮	⋮	⋮	⋮
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
⋮	⋮	⋮	⋮

(1)

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

(2)　$\cos\theta = \frac{6}{7} = 0.8571\cdots$

三角比の表より，$\cos\theta$ の値が 0.8571…に最も近い θ を求めると　$\theta \fallingdotseq 31°$

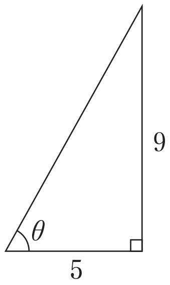
練習

(1)　次の三角比の値を求めよ。

(i)　$\sin 30^\circ$　　(ii)　$\cos 45^\circ$　　(iii)　$\tan 60^\circ$

(2)　右の図において，θ のおよその大きさを，下の三角比の値を用いて求めよ。

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
⋮	⋮	⋮	⋮
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626
⋮	⋮	⋮	⋮



(1)(i)　$\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$　　(ii)　$\cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(iii)　$\tan 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

(2)　$\tan\theta = \dfrac{9}{5} = 1.8$

三角比の表より，$\tan\theta$ の値が 1.8 に最も近い θ を求めると　$\theta \fallingdotseq 61^\circ$

PART3　三角比の相互関係

例題

θ は鋭角とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\tan\theta=2$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

(1)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

θ は鋭角より，$\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{3}\div\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

(2)　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ であるから

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+2^2=5 \qquad \cos^2\theta=\frac{1}{5}$$

θ は鋭角より，$\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=2\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

練習

θ は鋭角とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\tan\theta=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

(1)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$$

θ は鋭角より，$\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{7}}{4}\div\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

(2)　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ であるから

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{13}{9}\qquad\cos^2\theta=\frac{9}{13}$$

θ は鋭角より，$\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{9}{13}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{\sqrt{13}}=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

PART4　$90°-\theta$ の三角比，三角比の利用

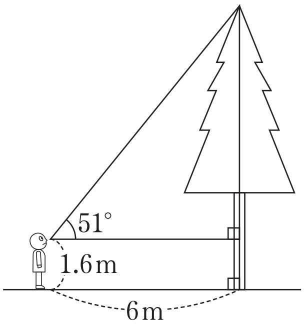
例題

(1)　次の三角比を，45° 以下の三角比で表せ。

(i)　$\sin 70°$　　(ii)　$\cos 84°$　　(iii)　$\tan 50°$

(2)　木の根元から 6 m 離れたところで，木の先端を見上げたときの仰角が 51° であった。目の高さを 1.6 m として，木の高さを求めよ。

ただし，$\sin 51° = 0.7771$，$\cos 51° = 0.6293$，$\tan 51° = 1.2349$ とし，小数第 2 位を四捨五入せよ。



(1)(i)　$\sin 70° = \sin(90°-20°) = \cos 20°$

(ii)　$\cos 84° = \cos(90°-6°) = \sin 6°$

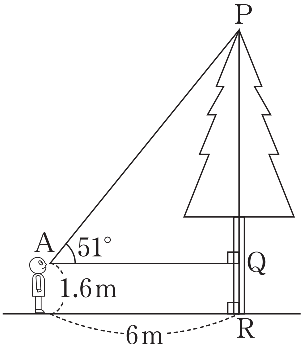
(iii)　$\tan 50° = \tan(90°-40°) = \dfrac{1}{\tan 40°}$

(2)　右図において

$$PQ = AQ\tan 51° = 6 \times 1.2349 = 7.4094$$

よって，木の高さ PR は

$$PR = PQ + QR$$
$$= 7.4094 + 1.6 = 9.0094 \fallingdotseq 9.0\ (\text{m})$$



練習

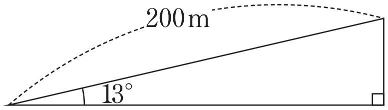
(1)　次の三角比を，45° 以下の三角比で表せ。

(i)　$\sin 54^\circ$　　(ii)　$\cos 88^\circ$　　(iii)　$\tan 72^\circ$

(2)　傾斜角が 13° の上り坂をまっすぐに 200m 進むとき，次の問いに答えよ。ただし，$\sin 13^\circ = 0.2250$，$\cos 13^\circ = 0.9744$，$\tan 13^\circ = 0.2309$ とし，小数第２位を四捨五入して求めよ。

(i)　鉛直方向には何 m 上がることになるか。

(ii)　水平方向には何 m 進むことになるか。



(1)(i)　$\sin 54^\circ = \sin(90^\circ - 36^\circ) = \cos 36^\circ$

(ii)　$\cos 88^\circ = \cos(90^\circ - 2^\circ) = \sin 2^\circ$

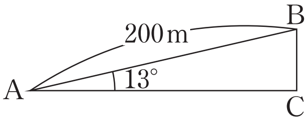
(iii)　$\tan 72^\circ = \tan(90^\circ - 18^\circ) = \dfrac{1}{\tan 18^\circ}$

(2)(i)　右図において

$$BC = AB\sin 13^\circ = 200 \times 0.2250 = 45.0\ (\mathrm{m})$$

(ii)　右図において

$$AC = AB\cos 13^\circ = 200 \times 0.9744 = 194.88 \fallingdotseq 194.9\ (\mathrm{m})$$



第 10 講　三角比の拡張

PART1　座標を用いた三角比の定義

例題

次の三角比の値を求めよ。

(1)　$\sin 120^\circ$，$\cos 120^\circ$，$\tan 120^\circ$

(2)　$\sin 135^\circ$，$\cos 135^\circ$，$\tan 135^\circ$

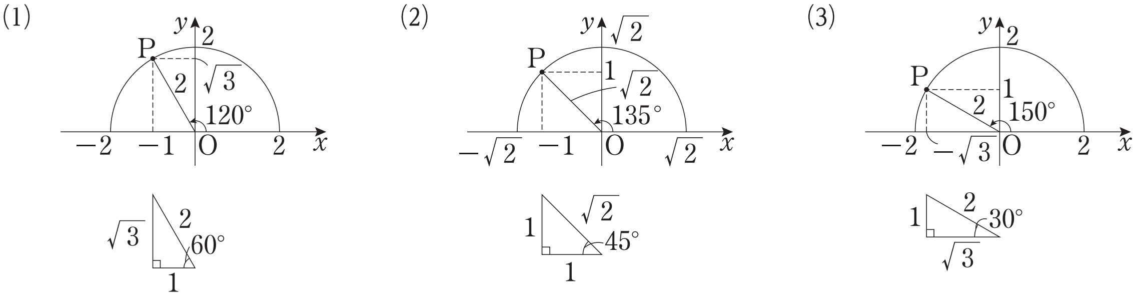
(3)　$\sin 150^\circ$，$\cos 150^\circ$，$\tan 150^\circ$

(1)　$\sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 120^\circ = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$，$\tan 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$

(2)　$\sin 135^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos 135^\circ = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\tan 135^\circ = \dfrac{1}{-1} = -1$

(3)　$\sin 150^\circ = \dfrac{1}{2}$，$\cos 150^\circ = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan 150^\circ = \dfrac{1}{-\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

（参考図）



練習

下の表の空欄にあてはまる値を入れ，表を完成させよ。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$									
$\cos\theta$									
$\tan\theta$					／				

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

PART2　単位円を用いた三角比の定義

例題

(1)　次の三角比の値を，単位円を用いて求めよ。

(i)　$\sin 120^\circ$，$\cos 120^\circ$　　(ii)　$\sin 135^\circ$，$\cos 135^\circ$　　(iii)　$\sin 150^\circ$，$\cos 150^\circ$

(2)　次の三角比の値を，単位円を用いて求めよ。

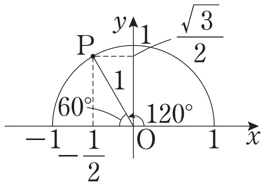
(i)　$\tan 120^\circ$　　(ii)　$\tan 135^\circ$　　(iii)　$\tan 150^\circ$

(1)(i)　＜図 1 ＞より　$\sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}$

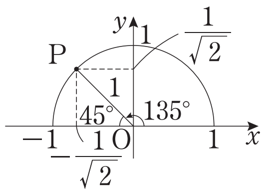
(ii)　＜図 2 ＞より　$\sin 135^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\cos 135^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(iii)　＜図 3 ＞より　$\sin 150^\circ = \dfrac{1}{2}$，$\cos 150^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

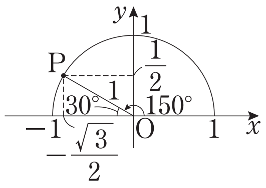
＜図 1 ＞



＜図 2 ＞



＜図 3 ＞

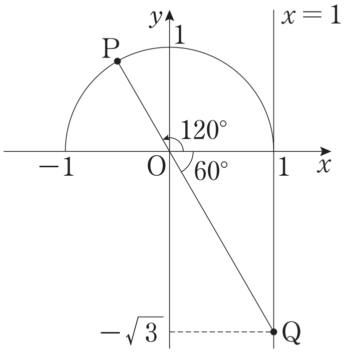


(2)(i)　＜図 4 ＞より　$\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$

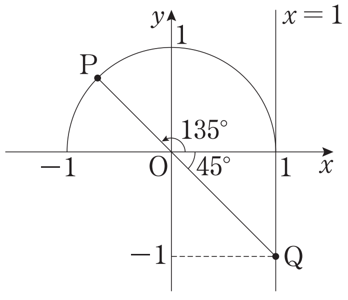
(ii)　＜図 5 ＞より　$\tan 135^\circ = -1$

(iii)　＜図 6 ＞より　$\tan 150^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

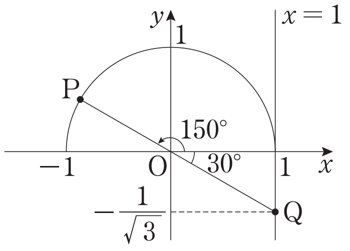
＜図 4 ＞



＜図 5 ＞



＜図 6 ＞



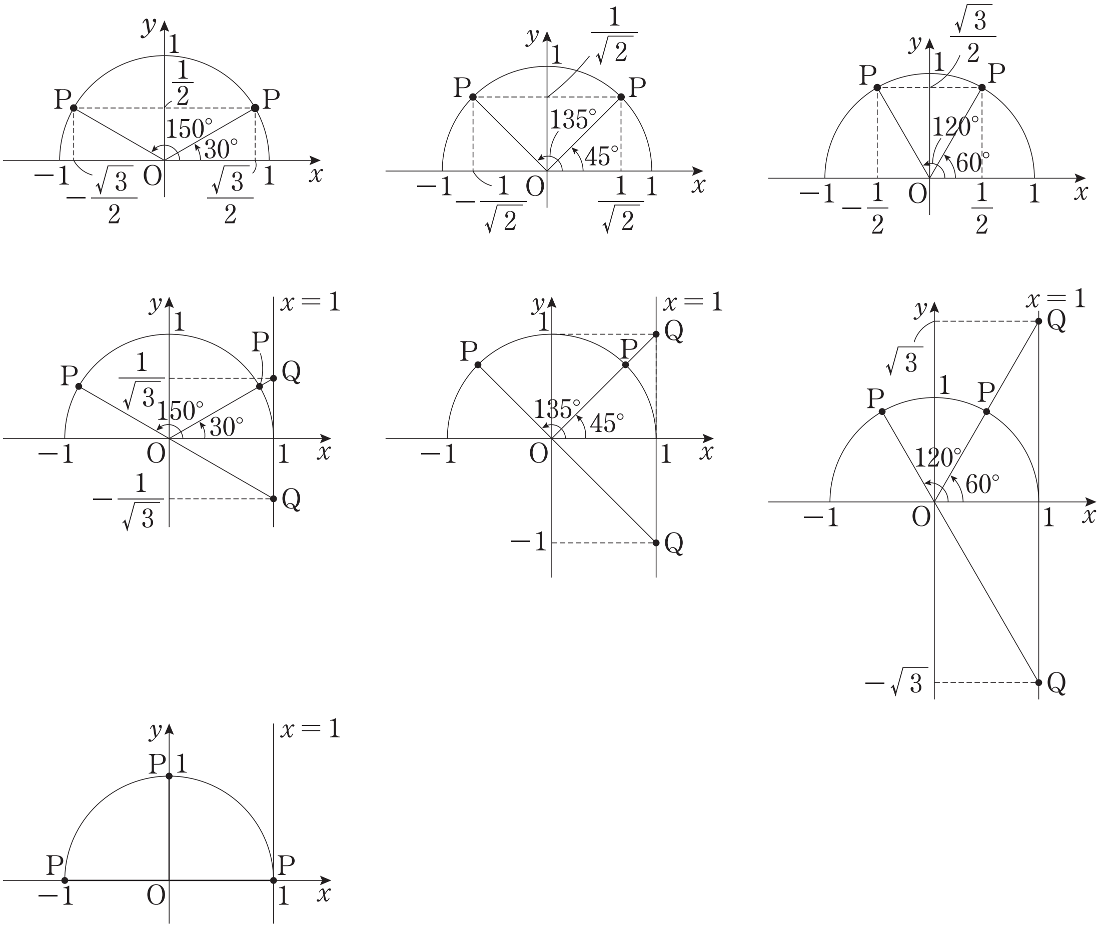
練習

単位円を用いて，下の表の空欄にあてはまる値を入れ，表を完成させよ。

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\theta$									
$\cos\theta$									
$\tan\theta$					／				

θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	／	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

（参考図）



PART3　三角比の値と角，直線の傾きと正接

例題

(1)　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の等式を満たす θ を求めよ。

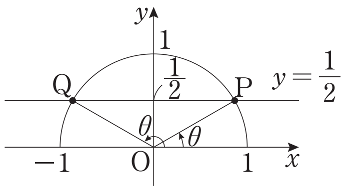
(i)　$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$　　(ii)　$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$　　(iii)　$\tan\theta = -1$

(2)　直線 $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ と x 軸の正の向きとのなす角を求めよ。

(1)(i)　単位円の $y \geqq 0$ の部分において，y 座標が $\dfrac{1}{2}$ となるのは，

右図の点 P，Q である。

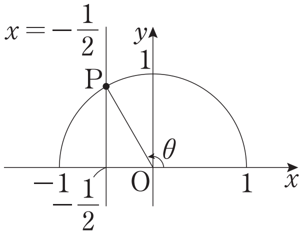
よって，求める θ は　$\theta = 30°,\ 150°$



(ii)　単位円の $y \geqq 0$ の部分において，x 座標が $-\dfrac{1}{2}$ となるのは，

右図の点 P である。

よって，求める θ は　$\theta = 120°$

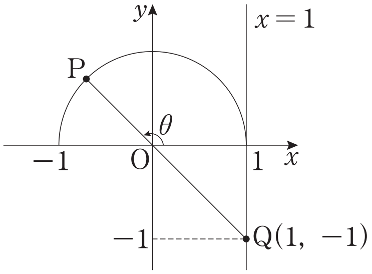


(iii)　直線 $x = 1$ 上に，点 Q(1，-1) をとる。

単位円の $y \geqq 0$ の部分と直線 OQ の交点は，右図の点 P

である。

よって，求める θ は　$\theta = 135°$



(2)　$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より　$\theta = 30°$

練習

(1)　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，次の等式を満たす θ を求めよ。

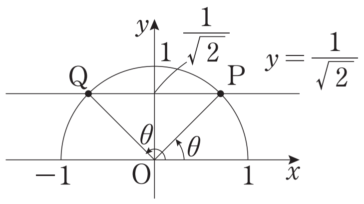
(i)　$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　　(ii)　$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(iii)　$\tan\theta = \sqrt{3}$

(2)　直線 $y = -x$ と x 軸の正の向きとのなす角を求めよ。

(1)(i)　単位円の $y \geqq 0$ の部分において，y 座標が $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となるのは，

右図の点 P，Q である。

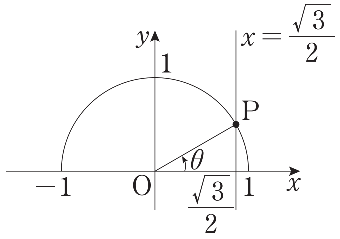
よって，求める θ は　$\theta = 45°$，$135°$



(ii)　単位円の $y \geqq 0$ の部分において，x 座標が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となるのは，

右図の点 P である。

よって，求める θ は　$\theta = 30°$

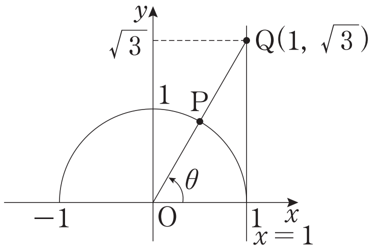


(iii)　直線 $x = 1$ 上に，点 Q$(1, \sqrt{3})$ をとる。

単位円の $y \geqq 0$ の部分と直線 OQ の交点は，右図の点 P

である。

よって，求める θ は　$\theta = 60°$



(2)　$\tan\theta = -1$ より　$\theta = 135°$

PART4　180°$-\theta$ の三角比，単位円と三角比の相互関係

例題

(1)　次の三角比を，鋭角の三角比で表せ。

(i)　$\sin 140^\circ$　　(ii)　$\cos 155^\circ$　　(iii)　$\tan 160^\circ$

(2)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。次の問いに答えよ。

(i)　$\sin\theta=\dfrac{2}{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(ii)　$\cos\theta=\dfrac{12}{13}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(iii)　$\tan\theta=\sqrt{2}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

(1)(i)　$\sin 140^\circ=\sin(180^\circ-40^\circ)=\sin 40^\circ$

(ii)　$\cos 155^\circ=\cos(180^\circ-25^\circ)=-\cos 25^\circ$

(iii)　$\tan 160^\circ=\tan(180^\circ-20^\circ)=-\tan 20^\circ$

(2)(i)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^2=1-\dfrac{4}{25}=\dfrac{21}{25}$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ のとき，$\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{21}}{5},\quad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{5}\div\frac{\sqrt{21}}{5}=\frac{2}{5}\times\frac{5}{\sqrt{21}}=\frac{2}{\sqrt{21}}$$

$90^\circ<\theta<180^\circ$ のとき，$\cos\theta<0$ であるから

$$\cos\theta=-\frac{\sqrt{21}}{5},\quad \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{5}\div\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)=\frac{2}{5}\times\left(-\frac{5}{\sqrt{21}}\right)=-\frac{2}{\sqrt{21}}$$

(ii)　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^2=1-\dfrac{144}{169}=\dfrac{25}{169}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\sin\theta \geqq 0$ であるから $\sin\theta=\dfrac{5}{13}$

また $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{5}{13}\div\dfrac{12}{13}=\dfrac{5}{13}\times\dfrac{13}{12}=\dfrac{5}{12}$

(iii)　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より $\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+(\sqrt{2})^2=3$　　$\cos^2\theta=\dfrac{1}{3}$

$\tan\theta=\sqrt{2}>0$ より，$0^\circ<\theta<90^\circ$ であるから $\cos\theta>0$　　よって $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

また $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

練習

(1)　次の三角比を，鋭角の三角比で表せ。

(i)　$\sin 168^\circ$　　(ii)　$\cos 174^\circ$　　(iii)　$\tan 142^\circ$

(2)　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の問いに答えよ。

(i)　$\sin\theta = \dfrac{3\sqrt{5}}{7}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(ii)　$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(iii)　$\tan\theta = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ。

(1)(i)　$\sin 168^\circ = \sin(180^\circ - 12^\circ) = \sin 12^\circ$

(ii)　$\cos 174^\circ = \cos(180^\circ - 6^\circ) = -\cos 6^\circ$

(iii)　$\tan 142^\circ = \tan(180^\circ - 38^\circ) = -\tan 38^\circ$

(2)(i)　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\dfrac{3\sqrt{5}}{7}\right)^2 = 1 - \dfrac{45}{49} = \dfrac{4}{49}$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき，$\cos\theta > 0$ であるから

$$\cos\theta = \frac{2}{7},\quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3\sqrt{5}}{7} \div \frac{2}{7} = \frac{3\sqrt{5}}{7} \times \frac{7}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき，$\cos\theta < 0$ であるから

$$\cos\theta = -\frac{2}{7},\quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3\sqrt{5}}{7} \div \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{3\sqrt{5}}{7} \times \left(-\frac{7}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

(ii)　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\sin\theta \geqq 0$ であるから $\sin\theta = \sqrt{\dfrac{5}{6}} = \dfrac{\sqrt{30}}{6}$

また $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\sqrt{30}}{6} \div \dfrac{1}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{30}}{6} \times \sqrt{6} = \sqrt{5}$

(iii)　$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より $\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{10}{9}$　　$\cos^2\theta = \dfrac{9}{10}$

$\tan\theta = -\dfrac{1}{3} < 0$ より，$90^\circ < \theta < 180^\circ$ であるから $\cos\theta < 0$　　よって $\cos\theta = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

また $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より　$\sin\theta = \tan\theta\cos\theta = -\dfrac{1}{3} \times \left(-\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

第11講 正弦定理・余弦定理，三角形の面積

PART1 正弦定理

例題

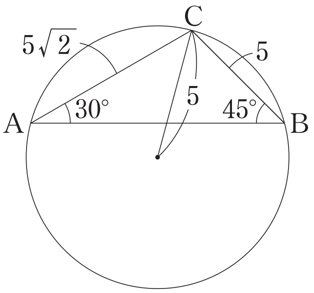
△ABC において，外接円の半径を R とするとき，次のものを求めよ。

(1) $a=5$，$A=30°$，$B=45°$ のとき b，R

(2) $b=1$，$c=\sqrt{3}$，$C=120°$ のとき A，B

(3) $c=4$，$R=2\sqrt{2}$ のとき，C

(1) 正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ つまり $\dfrac{5}{\sin 30°}=\dfrac{b}{\sin 45°}$

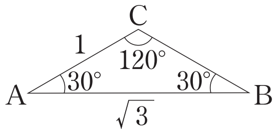


よって $b=\dfrac{5}{\sin 30°}\cdot\sin 45°=5\div\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=5\cdot 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$

また，正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=2R$ つまり $\dfrac{5}{\sin 30°}=2R$

よって $R=\dfrac{5}{2\sin 30°}=\dfrac{5}{2\cdot\dfrac{1}{2}}=5$

(2) 正弦定理より $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ つまり $\dfrac{1}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 120°}$



$\sin B=\dfrac{\sin 120°}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$

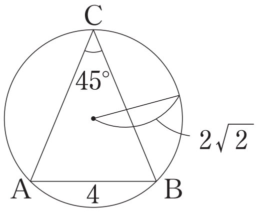
$C=120°$ より $B<60°$ よって $B=30°$

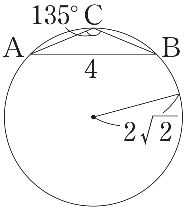
$A=180°-(120°+30°)=30°$

(3) 正弦定理より $\dfrac{c}{\sin C}=2R$ つまり $\dfrac{4}{\sin C}=4\sqrt{2}$

よって $\sin C=\dfrac{4}{4\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0°<C<180°$ より $C=45°$，$135°$





練習

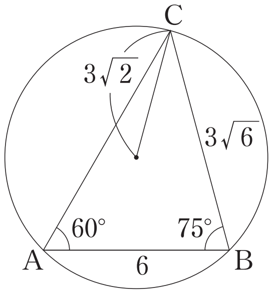
△ABC において，外接円の半径を R とするとき，次のものを求めよ。

(1)　$c=6$，$A=60^\circ$，$B=75^\circ$ のとき　a，R

(2)　$a=2$，$b=\sqrt{6}$，$A=45^\circ$ のとき　B，C

(3)　$a=10$，$R=10$ のとき，A

(1)　$A+B+C=180^\circ$ より $C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$

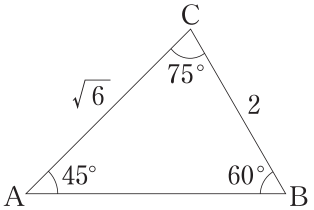


正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$　　つまり $\dfrac{a}{\sin 60^\circ}=\dfrac{6}{\sin 45^\circ}$

よって $a=\dfrac{6}{\sin 45^\circ}\cdot\sin 60^\circ=6\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{6}$

また，正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=2R$ つまり $\dfrac{3\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=2R$

よって $R=\dfrac{3\sqrt{6}}{2\sin 60^\circ}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=3\sqrt{2}$



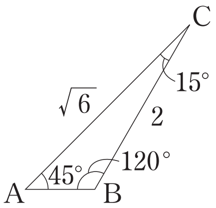
(2)　正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$　　つまり $\dfrac{2}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sin B}$

$$\sin B=\sqrt{6}\cdot\frac{\sin 45^\circ}{2}=\sqrt{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$A=45^\circ$ より $B<135^\circ$　　よって $B=60^\circ$，120°

$B=60^\circ$ のとき　$C=180^\circ-(45^\circ+60^\circ)=75^\circ$

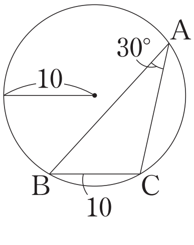
$B=120^\circ$ のとき　$C=180^\circ-(45^\circ+120^\circ)=15^\circ$

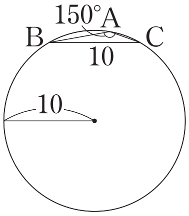


(3)　正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=2R$　　つまり $\dfrac{10}{\sin A}=20$

よって $\sin A=\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<A<180^\circ$ より $A=30^\circ$，150°





PART2　余弦定理

例題

△ABC において，次のものを求めよ。

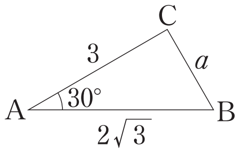
(1)　$b=3$，$c=2\sqrt{3}$，$A=30^\circ$ のとき　a

(2)　$a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{10}$，$c=2$ のとき　B

(3)　$b=2$，$c=\sqrt{6}$，$C=60^\circ$ のとき　a

(1)　余弦定理より

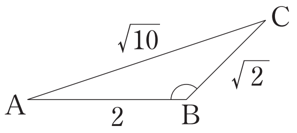
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$=3^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot3\cdot2\sqrt{3}\cdot\cos 30^\circ$$
$$=9+12-2\cdot3\cdot2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3$$



$a>0$ より $a=\sqrt{3}$

(2)　余弦定理より

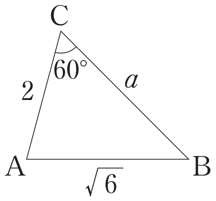
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$
$$=\frac{2^2+(\sqrt{2})^2-(\sqrt{10})^2}{2\cdot2\cdot\sqrt{2}}=\frac{-4}{4\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$



よって $B=135^\circ$

(3)　余弦定理より

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$
$$(\sqrt{6})^2=a^2+2^2-2\cdot a\cdot2\cdot\cos 60^\circ$$
$$a^2-2a-2=0$$



$a>0$ より $a=1+\sqrt{3}$

練習

△ABC において，次のものを求めよ。

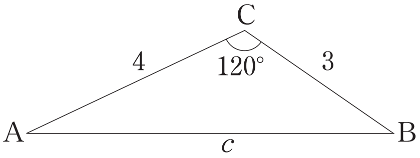
(1)　$a=3$，$b=4$，$C=120^\circ$ のとき　c

(2)　$a=13$，$b=7$，$c=15$ のとき　A

(3)　$a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{5}$，$B=45^\circ$ のとき　c

(1)　余弦定理より

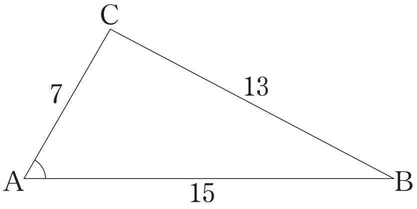
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$
$$=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cdot\cos120^\circ$$
$$=9+16-2\cdot3\cdot4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=37$$



$c>0$ より $c=\sqrt{37}$

(2)　余弦定理より

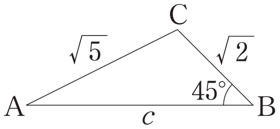
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$=\frac{7^2+15^2-13^2}{2\cdot7\cdot15}=\frac{105}{2\cdot7\cdot15}=\frac{1}{2}$$



よって $A=60^\circ$

(3)　余弦定理より

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$(\sqrt{5})^2=c^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot c\cdot\sqrt{2}\cdot\cos45^\circ$$
$$c^2-2c-3=0 \qquad (c+1)(c-3)=0$$



$c>0$ より $c=3$

PART3　三角形の決定

例題

次の各場合について，△ABC の残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

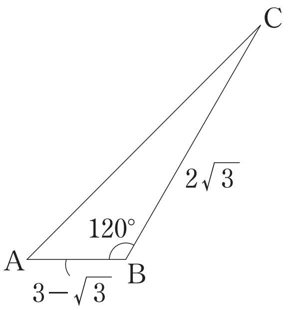
(1)　$a=2\sqrt{3}$，$c=3-\sqrt{3}$，$B=120°$

(2)　$a=8$，$A=45°$，$C=30°$

(1)　余弦定理より

$$b^2=(3-\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot(3-\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{3}\cdot\cos 120°$$

$$=9-6\sqrt{3}+3+12-4\sqrt{3}(3-\sqrt{3})\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=18$$



$b>0$ より　$b=3\sqrt{2}$

正弦定理より

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin A}=\frac{3\sqrt{2}}{\sin 120°}$$

$$\sin A=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cdot\sin 120°=\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$B=120°$ より $A<60°$　　よって $A=45°$

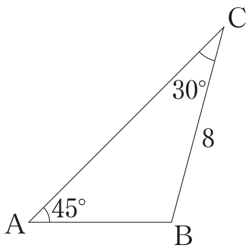
$$C=180°-(120°+45°)=15°$$

(2)　$B=180°-(45°+30°)=105°$

正弦定理より

$$\frac{c}{\sin 30°}=\frac{8}{\sin 45°}$$

$$c=\frac{8}{\sin 45°}\cdot\sin 30°=8\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=4\sqrt{2}$$



余弦定理より

$$(4\sqrt{2})^2=8^2+b^2-2\cdot 8\cdot b\cdot\cos 30°$$

$$b^2-8\sqrt{3}b+32=0 \qquad b=4\sqrt{3}\pm 4$$

B が最大角より，b が最大辺

よって $b=4\sqrt{3}+4$

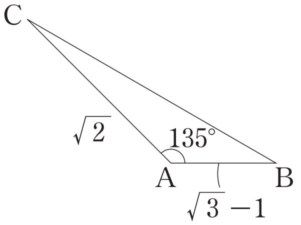
練習

次の各場合について，△ABC の残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

(1)　$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}-1$，$A=135°$

(2)　$c=2$，$A=60°$，$B=75°$

(1)　余弦定理より



$$a^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-1)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)\cdot\cos 135°$$

$$=2+3-2\sqrt{3}+1-2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=4$$

$a>0$ より $a=2$

正弦定理より

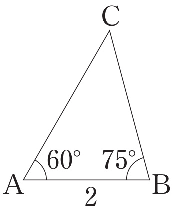
$$\frac{\sqrt{2}}{\sin B}=\frac{2}{\sin 135°}$$

$$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 135°=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

$A=135°$ より $B<45°$　　よって $B=30°$

$$C=180°-(135°+30°)=15°$$

(2)　$C=180°-(60°+75°)=45°$



正弦定理より

$$\frac{a}{\sin 60°}=\frac{2}{\sin 45°}$$

$$a=\frac{2}{\sin 45°}\cdot\sin 60°=2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}$$

余弦定理より

$$(\sqrt{6})^2=b^2+2^2-2\cdot b\cdot 2\cdot\cos 60°$$

$$b^2-2b-2=0 \qquad b=1\pm\sqrt{3}$$

$b>0$ より $b=1+\sqrt{3}$

PART4　三角形の面積

例題

次のような △ABC の面積 S を求めよ。

(1)　$a=6$，$b=5$，$C=30^\circ$

(2)　$a=2\sqrt{7}$，$b=4$，$c=2$

(3)　$a=7$，$b=11$，$c=6$

(1)　$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot \sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot \dfrac{1}{2}=\dfrac{15}{2}$

(2)　余弦定理より $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{4^2+2^2-(2\sqrt{7})^2}{2\cdot 4\cdot 2}=\dfrac{-8}{2\cdot 4\cdot 2}=-\dfrac{1}{2}$

$A=120^\circ$

よって $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\cdot \sin 120^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

(3)　余弦定理より $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\dfrac{6^2+7^2-11^2}{2\cdot 6\cdot 7}=\dfrac{-36}{2\cdot 6\cdot 7}=-\dfrac{3}{7}$

$\sin^2 B=1-\cos^2 B=1-\left(-\dfrac{3}{7}\right)^2=\dfrac{40}{49}$　　$\sin B>0$ より $\sin B=\dfrac{2\sqrt{10}}{7}$

よって $S=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 7\cdot \dfrac{2\sqrt{10}}{7}=6\sqrt{10}$

練習

次のような $\triangle ABC$ の面積 S を求めよ。

(1)　$a=2\sqrt{2}$，$c=3$，$B=45^\circ$

(2)　$a=5$，$b=3$，$c=7$

(3)　$a=8$，$b=6$，$c=4$

(1)　$S=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2\sqrt{2}\cdot\sin45^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=3$

(2)　余弦定理より $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{5^2+3^2-7^2}{2\cdot5\cdot3}=\dfrac{-15}{2\cdot5\cdot3}=-\dfrac{1}{2}$　　$C=120^\circ$

よって $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot3\cdot\sin120^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot3\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$

(3)　余弦定理より $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{6^2+4^2-8^2}{2\cdot6\cdot4}=\dfrac{-12}{2\cdot6\cdot4}=-\dfrac{1}{4}$

$\sin^2A=1-\cos^2A=1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{15}{16}$　　$\sin A>0$ より $\sin A=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

よって $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot4\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}=3\sqrt{15}$

第 12 講　図形の計量

PART1　角の二等分線の長さ，三角形の内接円と面積

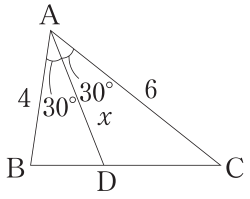
例題

(1)　△ABC において，AB＝4，AC＝6，$A=60^\circ$ とする。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

(2)　△ABC において，$a=7$，$b=6$，$c=5$ のとき，この三角形の内接円の半径 r を求めよ。

(1)　AD＝x とおく。

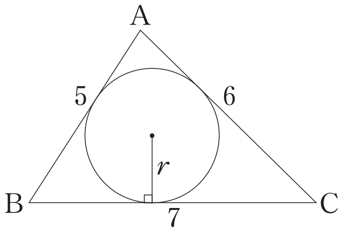
△ABC＝△ABD＋△ACD であるから



$$\frac{1}{2}\cdot4\cdot6\cdot\sin60^\circ=\frac{1}{2}\cdot4\cdot x\cdot\sin30^\circ+\frac{1}{2}\cdot6\cdot x\cdot\sin30^\circ$$

$6\sqrt{3}=x+\frac{3}{2}x$　　$x=\frac{12\sqrt{3}}{5}$　　よって AD＝$\frac{12\sqrt{3}}{5}$

(2)　余弦定理より



$$\cos A=\frac{6^2+5^2-7^2}{2\cdot6\cdot5}=\frac{12}{2\cdot6\cdot5}=\frac{1}{5}$$

$\sin A>0$ より $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

△ABC の面積を S とすると $S=\frac{1}{2}\cdot6\cdot5\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=6\sqrt{6}$

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ より $6\sqrt{6}=\frac{1}{2}r(7+6+5)$

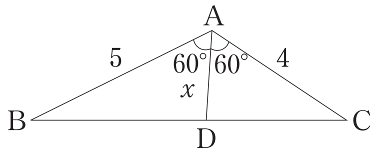
$6\sqrt{6}=9r$　　$r=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

練習

(1)　△ABC において，AB＝5，AC＝4，$A=120^\circ$ とする。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

(2)　△ABC において，$a=3$，$b=5$，$C=120^\circ$ のとき，この三角形の内接円の半径 r を求めよ。

(1)　AD$=x$ とおく。

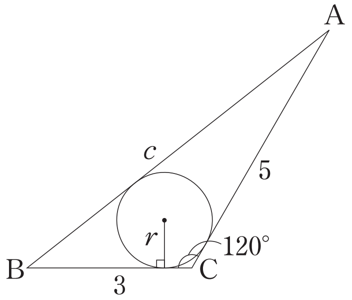


$\triangle$ABC$=\triangle$ABD$+\triangle$ACD であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot \sin 120^\circ=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot x\cdot \sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot x\cdot \sin 60^\circ$$

$$5\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{3}}{4}x+\sqrt{3}\,x \qquad x=\frac{20}{9} \qquad \text{よって AD}=\frac{20}{9}$$

(2)　余弦定理より



$$c^2=3^2+5^2-2\cdot 3\cdot 5\cdot \cos 120^\circ=9+25-2\cdot 3\cdot 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=49$$

$c>0$ より $c=7$

$\triangle$ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot \sin 120^\circ=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$$

$S=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)$ より $\dfrac{15\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1}{2}r(3+5+7)$

$$\frac{15\sqrt{3}}{4}=\frac{15}{2}r \qquad r=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

PART2　円に内接する四角形の面積

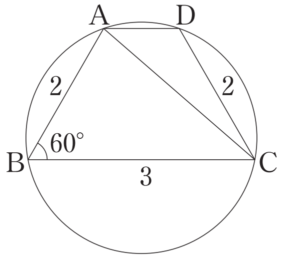
例題

円に内接する四角形 ABCD において

$AB=2,\ BC=3,\ CD=2,\ \angle ABC=60^\circ$

のとき，次の値を求めよ。

(1)　AC の長さ　　(2)　AD の長さ　　(3)　四角形 ABCD の面積



(1)　△ABC において余弦定理より

$$AC^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cdot\cos60^\circ$$

$$=4+9-2\cdot2\cdot3\cdot\frac{1}{2}=7$$

$AC>0$ より　$AC=\sqrt{7}$

(2)　四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle ADC=180^\circ-\angle ABC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$$

$AD=x$ とおくと，△ACD において余弦定理より

$$(\sqrt{7})^2=x^2+2^2-2\cdot x\cdot2\cdot\cos120^\circ$$

$$x^2+2x-3=0 \qquad (x+3)(x-1)=0$$

$x>0$ より $x=1$

よって $AD=1$

(3)　四角形 ABCD の面積 S は

$$S=\triangle ABC+\triangle ACD$$

$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\sin60^\circ+\frac{1}{2}\cdot2\cdot1\cdot\sin120^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot2\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

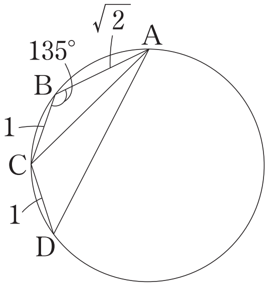
$$=2\sqrt{3}$$

練習

円に内接する四角形 ABCD において

$AB=\sqrt{2}$，$BC=1$，$CD=1$，$\angle ABC=135°$

のとき，四角形 ABCD の面積を求めよ。



△ABC において余弦定理より

$$AC^2=(\sqrt{2})^2+1^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot1\cdot\cos135°$$

$$=2+1-2\cdot\sqrt{2}\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=5$$

$AC>0$ より $AC=\sqrt{5}$

四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle ADC=180°-\angle ABC=180°-135°=45°$$

$AD=x$ とおくと，△ACD において余弦定理より

$$(\sqrt{5})^2=x^2+1^2-2\cdot x\cdot1\cdot\cos45°$$

$$x^2-\sqrt{2}x-4=0 \qquad x=\frac{-(-\sqrt{2})\pm\sqrt{(-\sqrt{2})^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2}=\frac{\sqrt{2}\pm3\sqrt{2}}{2}$$

$$x=2\sqrt{2},\ -\sqrt{2}$$

$x>0$ より $x=2\sqrt{2}$

よって $AD=2\sqrt{2}$

したがって，四角形 ABCD の面積 S は

$$S=\triangle ABC+\triangle ACD$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot1\cdot\sin135°+\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\sqrt{2}\cdot\sin45°$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3}{2}$$

PART3　直方体の切り口

例題

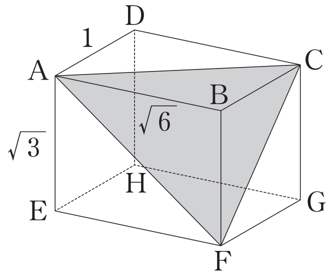
右の図のような

$AB=\sqrt{6}$，$AD=1$，$AE=\sqrt{3}$

である直方体 ABCD−EFGH がある。

(1)　△AFC の面積を求めよ。

(2)　頂点 B から △AFC に下ろした垂線を BI とする。BI の長さを求めよ。



(1)　三平方の定理より

$$AC=\sqrt{(\sqrt{6})^2+1^2}=\sqrt{7}$$

$$AF=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3})^2}=3$$

$$CF=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$$

△AFC において余弦定理より

$$\cos\angle CAF=\frac{(\sqrt{7})^2+3^2-2^2}{2\cdot\sqrt{7}\cdot 3}=\frac{12}{2\cdot\sqrt{7}\cdot 3}=\frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\sin\angle CAF=\sqrt{1-\cos^2\angle CAF}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

よって　$\triangle AFC=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AF\cdot\sin\angle CAF=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(2)　四面体 BAFC の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle BFC\cdot AB=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}\times\sqrt{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$V=\frac{1}{3}\triangle AFC\cdot BI$ より　$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times BI$

よって　$BI=\frac{\sqrt{6}}{3}$

練習

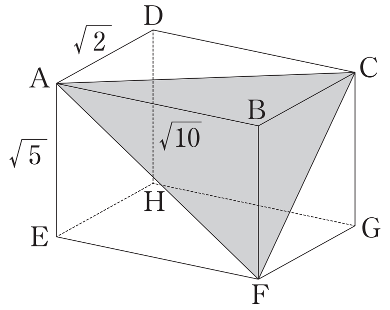
右の図のような

$$AB=\sqrt{10},\ AD=\sqrt{2},\ AE=\sqrt{5}$$

である直方体 ABCD−EFGH がある。

(1)　△AFC の面積を求めよ。

(2)　頂点 B から △AFC に下ろした垂線を BI とする。BI の長さを求めよ。



(1)　三平方の定理より

$$AC=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{10})^2}=2\sqrt{3}$$

$$AF=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{10})^2}=\sqrt{15}$$

$$CF=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{7}$$

△AFC において余弦定理より

$$\cos\angle CAF=\frac{(\sqrt{15})^2+(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot\sqrt{15}\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{20}{2\cdot\sqrt{3}\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{5}{3\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin\angle CAF=\sqrt{1-\cos^2\angle CAF}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$$

よって　$\triangle AFC=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AF\cdot\sin\angle CAF=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}\cdot\frac{2}{3}=2\sqrt{5}$

(2)　四面体 BAFC の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle BFC\cdot AB=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\times\sqrt{10}=\frac{5}{3}$$

$V=\frac{1}{3}\triangle AFC\cdot BI$ より　$\frac{5}{3}=\frac{1}{3}\times 2\sqrt{5}\times BI$

よって　$BI=\frac{\sqrt{5}}{2}$

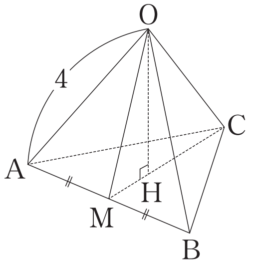
PART4　四面体の切り口

例題

1辺の長さが4である正四面体OABCにおいて，辺ABの中点をMとし，頂点OからCMに垂線OHを下ろす。

(1)　$\angle OMC=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2)　OHの長さを求めよ。



(1)　$\angle OMA=\angle OMB=90°$，$\angle OAM=60°$ より，$\triangle OAM$ において

$$OM=OA\sin 60°=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

同様に　$CM=2\sqrt{3}$

$\triangle OMC$ において，余弦定理より

$$\cos\theta=\frac{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-4^2}{2\cdot2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{3}}=\frac{8}{2^3\cdot3}=\frac{1}{3}$$

(2)　$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

よって，$\triangle OMH$ において

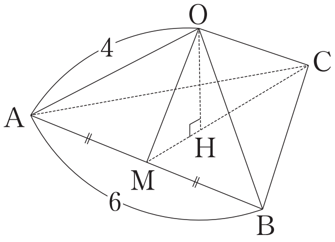
$$OH=OM\sin\theta=2\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$$

練習

四面体OABCにおいて，$OA=OB=OC=4$，$AB=BC=CA=6$ である。辺ABの中点をMとし，頂点OからCMに垂線OHを下ろす。

(1)　$\angle OMC=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2)　OHの長さを求めよ。



(1)　$\angle OMA=\angle OMB=90°$，$AM=\frac{1}{2}AB=3$ より，$\triangle OAM$ において

$$\mathrm{OM}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$$

$\angle\mathrm{CMA}=\angle\mathrm{CMB}=90^\circ$，$\angle\mathrm{CAM}=60^\circ$ より，$\triangle\mathrm{CAM}$ において

$$\mathrm{CM}=\mathrm{CA}\sin 60^\circ=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

$\triangle\mathrm{OMC}$ において，余弦定理より

$$\cos\theta=\frac{(\sqrt{7})^2+(3\sqrt{3})^2-4^2}{2\cdot\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{3}}=\frac{18}{6\sqrt{21}}=\frac{3}{\sqrt{21}}$$

(2)　$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{\sqrt{21}}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{3}{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$

よって，$\triangle\mathrm{OMH}$ において

$$\mathrm{OH}=\mathrm{OM}\sin\theta=\sqrt{7}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}=2$$

第 13 講　データの分析

PART1　データの整理，データの散らばり，外れ値

例題

次のデータは，A 町のある年における降水日数を月ごとに調べたものである。

3，8，11，11，5，9，11，10，18，5，7，10（日）

(1)　このデータの平均値，中央値，最頻値を求めよ。

(2)　このデータの範囲，四分位数，四分位範囲を求め，箱ひげ図をかけ。

(3)　次のような値を外れ値と定める。

> データの第 1 四分位数を Q_1，第 3 四分位数を Q_3 とするとき，
> $Q_1-1.5\times(Q_3-Q_1)$ 以下の値 または $Q_3+1.5\times(Q_3-Q_1)$ 以上の値

与えられたデータに外れ値はあるか。ある場合はその外れ値を示した上で，外れ値を除いたデータにおける平均値を求めよ。

与えられたデータを値の小さい順に並べると

3，5，5，7，8，9，10，10，11，11，11，18（日）

(1)　平均値は $\dfrac{1}{12}(3+5+5+7+8+9+10+10+11+11+11+18)=\dfrac{108}{12}=9$（日）

中央値は $\dfrac{9+10}{2}=9.5$（日）　　　最頻値は 11（日）

(2)　範囲は $18-3=15$（日）

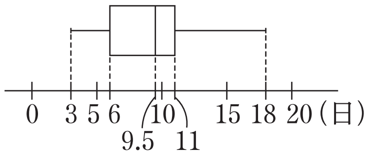
第 1 四分位数は $Q_1=\dfrac{5+7}{2}=6$（日）

第 2 四分位数は $Q_2=9.5$（日）

第 3 四分位数は $Q_3=\dfrac{11+11}{2}=11$（日）

四分位範囲は $Q_3-Q_1=11-6=5$（日）

箱ひげ図は右図



(3)　$Q_1-1.5\times(Q_3-Q_1)=6-1.5\times5=-1.5$，$Q_3+1.5\times(Q_3-Q_1)=11+1.5\times5=18.5$

よって，外れ値は -1.5 以下の値または 18.5 以上の値である。

したがって，与えられたデータに外れ値はない。

練習

次のデータは，A さんと B さんのあるゲームの記録を，値の小さい順に並べたものである。

A さん：2，5，5，6，7，7，7，8，8，9

B さん：1，4，4，4，5，5，7，9，15

(1)　それぞれのデータの平均値を求めよ。

(2)　2 つのデータの箱ひげ図を並べてかけ。

(3)　次のような値を外れ値と定める。

> データの第 1 四分位数を Q_1，第 3 四分位数を Q_3 とするとき，
> $Q_1-1.5\times(Q_3-Q_1)$ 以下の値 または $Q_3+1.5\times(Q_3-Q_1)$ 以上の値

それぞれのデータに外れ値はあるか。ある場合はその外れ値を示した上で，外れ値を除いたデータにおける平均値を求めよ。

(1)　A さんのデータの平均値は $\frac{1}{10}(2+5+5+6+7+7+7+8+8+9)=\frac{64}{10}=6.4$

B さんのデータの平均値は $\frac{1}{9}(1+4+4+4+5+5+7+9+15)=\frac{54}{9}=6$

(2)　A さんのデータについて

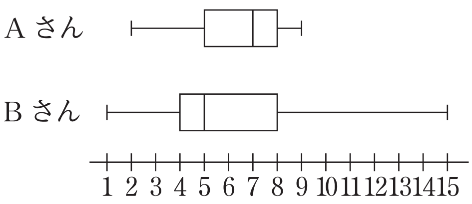
第 1 四分位数は $Q_1=5$　　第 2 四分位数は $Q_2=\frac{7+7}{2}=7$　　第 3 四分位数は $Q_3=8$

B さんのデータについて

第 1 四分位数は $Q_1=\frac{4+4}{2}=4$

第 2 四分位数は $Q_2=5$

第 3 四分位数は $Q_3=\frac{7+9}{2}=8$



箱ひげ図は右図

(3)　A さんのデータについて

$Q_1-1.5\times(Q_3-Q_1)=5-1.5\times3=0.5$，$Q_3+1.5\times(Q_3-Q_1)=8+1.5\times3=12.5$

よって，外れ値は 0.5 以下の値または 12.5 以上の値である。

したがって，A さんのデータに外れ値はない。

B さんのデータについて

$Q_1-1.5\times(Q_3-Q_1)=4-1.5\times4=-2$，$Q_3+1.5\times(Q_3-Q_1)=8+1.5\times4=14$

よって，外れ値は -2 以下の値または 14 以上の値である。

したがって，B さんのデータの外れ値は 15

値 15 を除いたデータの平均値は $\frac{1}{8}(1+4+4+4+5+5+7+9)=\frac{39}{8}=4.875$

PART2　分散と標準偏差

例題

次のデータは，あるサッカーチームが 10 試合行ったときの，各試合に決めたゴール数の結果である。

0，1，4，1，5，1，3，1，0，4 (回)

(1)　このデータの平均値 $\overline{x}$ を求めよ。

(2)　このデータの分散 s^2 を求めよ。

(3)　このデータの標準偏差 s を求めよ。

(1)　$\overline{x}=\dfrac{1}{10}(0+1+4+1+5+1+3+1+0+4)=\dfrac{20}{10}=2$ (回)

(2)　$s^2=\dfrac{1}{10}\{(-2)^2+(-1)^2+2^2+(-1)^2+3^2+(-1)^2+1^2+(-1)^2+(-2)^2+2^2\}=\dfrac{30}{10}=3$

(別解)

$\overline{x^2}=\dfrac{1}{10}(0^2+1^2+4^2+1^2+5^2+1^2+3^2+1^2+0^2+4^2)=\dfrac{70}{10}=7$

よって　$s^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2=7-2^2=3$

(3)　$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{3}=1.73\cdots\cdots \fallingdotseq 1.7$ (回)

練習

次のデータは，アーティスト A，B の新曲をあるレコード店でそれぞれ 5 名ずつ試聴してもらい，曲の評価を 10 点満点でつけてもらった結果である。

アーティスト A：5，7，3，6，9

アーティスト B：4，6，5，8，7 (単位は点)

アーティスト A，B の曲の評価をそれぞれ x 点，y 点とする。

(1)　変量 x の平均値 $\overline{x}$，分散 $s_x{}^2$，標準偏差 s_x を求めよ。

(2)　変量 y の平均値 $\overline{y}$，分散 $s_y{}^2$，標準偏差 s_y を求めよ。

(3)　標準偏差 s_x，s_y によって，アーティスト A，B の評価の散らばりの度合いを比較せよ。

(1)　$\overline{x}=\dfrac{1}{5}(5+7+3+6+9)=\dfrac{30}{5}=6$（点）

$s_x{}^2=\dfrac{1}{5}\{(-1)^2+1^2+(-3)^2+0^2+3^2\}=\dfrac{20}{5}=4$

$s_x=\sqrt{s_x{}^2}=\sqrt{4}=2$（点）

(2)　$\overline{y}=\dfrac{1}{5}(4+6+5+8+7)=\dfrac{30}{5}=6$（点）

$s_y{}^2=\dfrac{1}{5}\{(-2)^2+0^2+(-1)^2+2^2+1^2\}=\dfrac{10}{5}=2$

$s_y=\sqrt{s_y{}^2}=\sqrt{2}=1.41\cdots\cdots \fallingdotseq 1.4$（点）

(3)　$s_x>s_y$ より，アーティスト A の方が散らばりの度合いが大きい

PART3　データの相関

例題

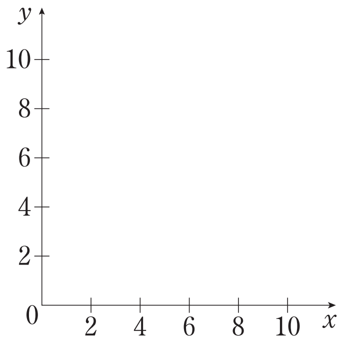
次の表は，2 つの変量 x，y からなるデータである。

x	2	5	1	9	3	6	7	4	8	6
y	8	6	9	2	7	4	3	7	2	3

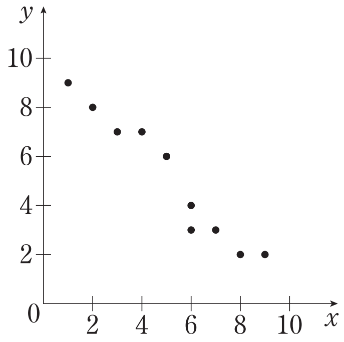
(1)　散布図をかき，x，y の間に相関があるか調べよ。また，相関がある場合は，正，負のどちらの相関があると考えられるかを答えよ。

(2)　x と y の分散はともに 6.09，x と y の共分散は -5.91 である。x と y の相関係数を求めよ。ただし小数第 3 位を四捨五入せよ。

〈散布図〉



(1)



負の相関がある

(2)　x と y の分散はともに 6.09 より，x と y の標準偏差はともに $\sqrt{6.09}$

よって，x と y の相関係数は

$$\frac{-5.91}{\sqrt{6.09}\sqrt{6.09}}=-\frac{5.91}{6.09}=-0.970\cdots\cdots \fallingdotseq -0.97$$

練習

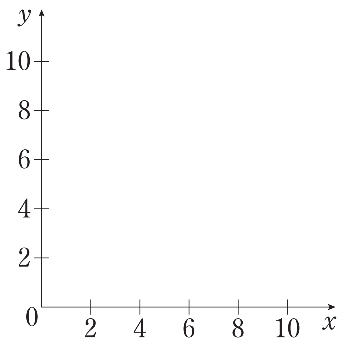
次の表は，5 人の生徒 a，b，c，d，e の小テスト A，B の得点である。A の得点を x(点)，B の得点を y(点)とする。

生徒	a	b	c	d	e
A の得点	10	8	4	7	6
B の得点	6	9	3	5	7

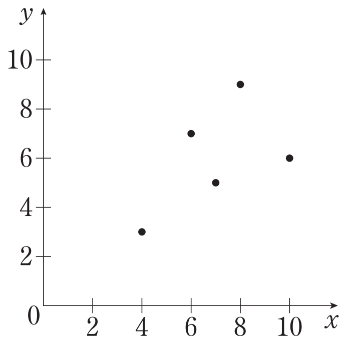
⑴　散布図をかき，x，y の間に相関があるか調べよ。
　また，相関がある場合は，正，負のどちらの相関があると考えられるかを答えよ。

⑵　x と y の相関係数を求めよ。

〈散布図〉



⑴



正の相関がある

⑵　$\overline{x}=\dfrac{1}{5}(10+8+4+7+6)=7$ (点)

$\overline{y}=\dfrac{1}{5}(6+9+3+5+7)=6$ (点)

${s_x}^2=\dfrac{1}{5}\{3^2+1^2+(-3)^2+0^2+(-1)^2\}=\dfrac{20}{5}=4$ より $s_x=\sqrt{{s_x}^2}=\sqrt{4}=2$ (点)

${s_y}^2=\dfrac{1}{5}\{0^2+3^2+(-3)^2+(-1)^2+1^2\}=\dfrac{20}{5}=4$ より $s_y=\sqrt{{s_y}^2}=\sqrt{4}=2$ (点)

$s_{xy}=\dfrac{1}{5}\{3\cdot0+1\cdot3+(-3)\cdot(-3)+0\cdot(-1)+(-1)\cdot1\}=\dfrac{11}{5}=2.2$

よって，相関係数は $r=\dfrac{s_{xy}}{s_x s_y}=\dfrac{2.2}{2\times2}=0.55$

PART4　仮説検定

例題

あるゲームにおいて，A と B は互角の実力といわれている。この 2 人の対戦結果の，直近 8 回の結果は，A の 7 勝 1 敗であった。この結果から，A の実力は B の実力より上である，と判断してよいか。基準となる確率を 0.05 とし，仮説検定を用いて考察せよ。

ただし，表と裏が出る確率がともに 0.5 であるコインを 8 回投げて表が出た回数を記録する操作を 1000 セット行った結果が以下の表であるとし，この結果を用いよ。

表の回数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	計
度数	4	29	113	216	274	220	108	31	5	1000

仮説①　「A の実力は B の実力より上である」

仮説②　「A と B は互角の実力である」

表より，コインを 8 回投げて表が 7 回以上出る場合の相対度数は

$$\frac{31+5}{1000}=\frac{36}{1000}=0.036$$

この結果から，仮説②のもとで A が 8 回中 7 回以上勝つ確率は 0.036 程度であると考えられる。

これは基準となる確率 0.05 よりも小さいから，仮説②は正しくないと判断できる。

よって，仮説①は正しいと判断できる。

したがって，A の実力は B の実力より上と判断してよい。

練習

ある文具メーカーが，自社製品 A を改良し，製品 B を試作した。25 人にアンケートを実施した。次の(1)，(2)のアンケート結果が得られたとき，各場合において B が A より使い心地がよいと判断してよいか。基準となる確率を 0.05 とし，仮説検定を用いて考察せよ。

ただし，表と裏が出る確率がともに 0.5 であるコインを 25 回投げて表が出た回数を記録する操作を 200 セット行った結果が以下の表であるとし，この結果を用いよ。

表の回数	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	計
度数	3	7	12	19	27	31	33	25	20	12	7	2	1	1	200

(1)　25 人中 18 人が B が A より使い心地がよいと答えた。

(2)　25 人中 17 人が B が A より使い心地がよいと答えた。

仮説①　「B が A より使い心地がよい」

仮説②　「A と B の使い心地に差はない」

(1)　表より，コインを 25 回投げて表が 18 回以上出る場合の相対度数は

$$\frac{2+1+1}{200}=\frac{4}{200}=0.02$$

この結果から，仮説②のもとで 25 人中 18 人以上が B が A より使い心地がよいと回答する確率は 0.02 であると考えられる。

これは基準となる確率 0.05 よりも小さいから，仮説②は正しくないと判断できる。

よって，仮説①は正しいと判断できる。

したがって，B が A より使い心地がよいと判断してよい。

(2)　表より，コインを 25 回投げて表が 17 回以上出る場合の相対度数は

$$\frac{7+2+1+1}{200}=\frac{11}{200}=0.055$$

この結果から，仮説②のもとで 25 人中 17 人以上が B が A より使い心地がよいと回答する確率は 0.055 であると考えられる。

これは基準となる確率 0.05 よりも大きいから，仮説②は正しくないとは判断できない。

よって，仮説①が正しいとは判断できない。

したがって，B が A より使い心地がよいとは判断できない。

第 1 講　PART1　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：②，イ：1，ウ：③，エ：5

[解説]

m に着目すると　$-3x^2y^3 \times m$ [A]

よって，係数は $\boldsymbol{-3x^2y^3}$，次数は **1**

x と y に着目すると　$-3m \times x^2y^3$ [A]

よって，係数は $\boldsymbol{-3m}$，次数は **5**

[A]　特定の文字に着目した場合，他の文字は数（定数）として扱う。

2 **[正解]** オ：③

[解説]

$4x^2+2xy+3y^2-3x+7y+2$

$=3y^2+2xy+7y+4x^2-3x+2$ [B]

$=\boldsymbol{3y^2+(2x+7)y+4x^2-3x+2}$

[B]　整式の整理
① 同類項をまとめる。
② 降べきの順に並べる。
次数の高い項から順に並べることを「降べきの順」に整理するという。

第１講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：5，イ：7，ウ：2，エ：4

[解説]

$3(A-B)+2B=3A-3B+2B=3A-B$

$=3(x^3+4x^2y-3xy^2-2y^3)$

$\quad -(-2x^3+5x^2y-7xy^2-2y^3)$ [A]

$=3x^3+12x^2y-9xy^2-6y^3+2x^3-5x^2y+7xy^2+2y^3$

$=\mathbf{5x^3+7x^2y-2xy^2-4y^3}$

[A]　−(　)は，(　)の中の項の符号をすべて変えて計算する。

2

[正解] オカ：18，キ：3，ク：6，ケ：4

[解説]

$3ab^2c^3\times(-6a^2b^4c)$

$=3\times(-6)\times a^{1+2}b^{2+4}c^{3+1}$ [B]

$=\mathbf{-18a^3b^6c^4}$

[B]　指数法則
m，n が正の整数のとき，
$a^m\times a^n=a^{m+n}$
を利用する。

3

[正解] コサ：−4，シ：8，ス：9

[解説]

$(-2xy^3)^2\times(-x^2y)^3$ [C]

$=(-2)^2x^2(y^3)^2\times(-1)^3(x^2)^3y^3$

$=4x^2y^{3\times2}\times(-1)x^{2\times3}y^3$

$=\mathbf{-4x^8y^9}$

[C]　指数法則
m，n が正の整数のとき，
$(a^m)^n=a^{m\times n}$，
$(ab)^n=a^nb^n$
を利用する。

4

[正解] セソ：−4，タ：9，チ：2

[解説]

$-12xy\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{3}{4}xy+\frac{1}{6}y^2\right)$ [D]

$=-12xy\cdot\frac{1}{3}x^2-12xy\cdot\left(-\frac{3}{4}xy\right)-12xy\cdot\frac{1}{6}y^2$

$=\mathbf{-4x^3y+9x^2y^2-2xy^3}$

[D]　(単項式)×(多項式)の計算は，分配法則
$A(B+C)=AB+AC$
を用いて計算することができる。
この問題では，$-12xy$ を(　)内の各項にかける。

第 1 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：6，イ：7，ウエ：20

[解説]

$(3x-4y)(2x+5y)$ [A]

$=3\cdot 2x^2+\{3\cdot 5+(-4)\cdot 2\}xy+(-4)\cdot 5y^2$

$=\boldsymbol{6x^2+7xy-20y^2}$

[A]　展開の公式
$(ax+b)(cx+d)$
$=acx^2+(ad+bc)x+bd$
を利用する。

2

[正解] オ：2，カ：2

[解説]

$a+c=A$，$b-d=B$ とおくと [B]

$(a+b+c-d)(a-b+c+d)$

$=(A+B)(A-B)$

$=A^2-B^2$

$=(a+c)^2-(b-d)^2$

$=a^2+2ac+c^2-(b^2-2bd+d^2)$

$=\boldsymbol{a^2-b^2+c^2-d^2+2ac+2bd}$

[B]　おき換えることで，展開の公式を利用できる形にする。

3

[正解] キ：4，ク：2

[解説]

$a+2b=A$ とおくと [C]

$(a+2b+c)^2=(A+c)^2$

$=A^2+2Ac+c^2$

$=(a+2b)^2+2(a+2b)c+c^2$

$=a^2+4ab+4b^2+2ac+4bc+c^2$

$=\boldsymbol{a^2+4b^2+c^2+4ab+4bc+2ca}$

[C]　おき換えることで，展開の公式を利用できる形にする。

(別解)

$(a+2b+c)^2$ [D]

$=a^2+(2b)^2+c^2+2\cdot a\cdot 2b+2\cdot 2b\cdot c+2\cdot c\cdot a$

$=\boldsymbol{a^2+4b^2+c^2+4ab+4bc+2ca}$

[D]　展開の準公式
$(a+b+c)^2$
$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

第 1 講　PART4　確認問題 解答

1

[正解] アイ：17，ウエ：72

[解説]

$(x-3)(x-2)(x+3)(x+4)$

$=\{(x-3)(x+4)\}\{(x-2)(x+3)\}$ [A]

$=(x^2+x-12)(x^2+x-6)$

$=(x^2+x)^2-18(x^2+x)+72$ [A]

$=x^4+2x^3+x^2-18x^2-18x+72$

$=\boldsymbol{x^4+2x^3-17x^2-18x+72}$

[A]　積の順序や組合せを工夫することで，展開の公式の利用やおき換えを行うことができる形にする。
この問題では，組合せ $(x-3)(x+4)$，$(x-2)(x+3)$ を考え，それぞれを展開し，共通な部分 x^2+x を 1 つの文字とみて（おき換え）計算を進める。

2

[正解] オカキク：6561，ケコサ：162

[解説]

$(3a+b)^2(3a-b)^2(9a^2+b^2)^2$ [B]

$=\{(3a+b)(3a-b)(9a^2+b^2)\}^2$ [C]

$=\{(9a^2-b^2)(9a^2+b^2)\}^2$

$=(81a^4-b^4)^2$

$=\boldsymbol{6561a^8-162a^4b^4+b^8}$

[B]　$A^2\times B^2\times C^2=(A\times B\times C)^2$

[C]　展開の公式
$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
を利用できる形にするために，積の順序を工夫する。

第 2 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：5，イ：3，ウ：2

[解説]

$5xyz^2+3x^2y-2xy^2z=\boldsymbol{xy(5z^2+3x-2yz)}$ [A]

[A]　すべての項の共通因数があれば，その共通因数でくくる。

2

[正解] エ：2

[解説]

$(a-2b)x+ay-2by=(a-2b)x+(a-2b)y$ [B]

$=\boldsymbol{(a-2b)(x+y)}$

[B]　共通に現れる式を 1 つのかたまりと見なし，共通因数としてくくり出す。
ここでは，$a-2b$ を共通因数とする。

3

[正解] オ：6

[解説]

$x^2+12xy+36y^2=\boldsymbol{(x+6y)^2}$ [C]

[C]　因数分解の公式
$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

4

[正解] カ：1，キ：1

[解説]

$18x^2-2=2(9x^2-1)$ [D]

$=\boldsymbol{2(3x+1)(3x-1)}$

[D]　因数分解の公式
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

5

[正解] ク：5，ケ：7

[解説]

$x^2-2xy-35y^2=\boldsymbol{(x+5y)(x-7y)}$ [E]

[E]　因数分解の公式
$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

第 2 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：6，イ：2，ウ：5

[解説]

$2x^2+17x+30=(\boldsymbol{x+6})(\boldsymbol{2x+5})$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 6 \longrightarrow & 12 \\ 2 & 5 \longrightarrow & 5 \\ \hline 2 & 30 & 17 \end{array}$$ [A]

[A]　たすきがけを用いる。

$acx^2+(ad+bc)x+bd$

$=(ax+b)(cx+d)$

$$\begin{array}{ccc} a & b \longrightarrow & bc \\ c & d \longrightarrow & ad \\ \hline & & ad+bc \end{array}$$

2

[正解] エ：4，オ：2

[解説]

$9x^2-6xy-8y^2=(\boldsymbol{3x-4y})(\boldsymbol{3x+2y})$

$$\begin{array}{ccc} 3 & -4y \longrightarrow & -12y \\ 3 & 2y \longrightarrow & 6y \\ \hline 9 & -8y^2 & -6y \end{array}$$ [B]

[B]　たすきがけを用いる。

$acx^2+(ad+bc)x+bd$

$=(ax+b)(cx+d)$

$$\begin{array}{ccc} a & b \longrightarrow & bc \\ c & d \longrightarrow & ad \\ \hline & & ad+bc \end{array}$$

第 2 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：4，ウ：4

[解説]

$a+1=X$ とおくと，[A]

$$3(a+1)^2-14(a+1)-5=3X^2-14X-5$$
$$=(3X+1)(X-5)$$
$$=\{3(a+1)+1\}\{(a+1)-5\}$$
$$=\boldsymbol{(3a+4)(a-4)}$$

[A]　式の一部を１つのかたまりと見なし，X などある文字におき換えることで，因数分解の公式が利用できる場合がある。

2

[正解] エ：3，オ：3

[解説]

$x^2=X$，$y^2=Y$ とおくと，[B]

$$x^4-81y^4=(x^2)^2-81(y^2)^2$$
$$=X^2-81Y^2$$
$$=(X-9Y)(X+9Y)$$
$$=(x^2-9y^2)(x^2+9y^2)$$
$$=\boldsymbol{(x+3y)(x-3y)(x^2+9y^2)}$$

[B]　x^2 と y^2 をそれぞれ X，Y などある文字におき換えることで，２次式の形で表すことができる。

第 2 講　PART4　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：5,　イ：5

[解説]

$x^2+xy-10x-5y+25$

$=(x-5)y+x^2-10x+25$ [A]

$=(x-5)y+(x-5)^2$

$=(x-5)\{y+(x-5)\}$

$=\boldsymbol{(x-5)(x+y-5)}$

[A]　1つの文字に着目して整理してから因数分解する。
着目する文字によって次数が異なる場合は，最も次数が低い文字に着目するとよい。

2　**[正解]** ウ：2,　エ：3,　オ：4

[解説]

$2a^2+ab-b^2-11a+b+12$

$=2a^2+(b-11)a-(b^2-b-12)$ [B]

$=2a^2+(b-11)a-(b+3)(b-4)$

$=\boldsymbol{(2a-b-3)(a+b-4)}$ [C]

[B]　1つの文字に着目して整理してから因数分解する。

[C]

2	$-(b+3)$	→	$-b-3$
1	$(b-4)$	→	$2b-8$
			$b-11$

第３講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：5，イ：9

[解説]

$x=0.\dot{5}$ とおくと，[A]

右の計算より，

$9x=5 \qquad x=\dfrac{5}{9}$

$$\begin{array}{rl} 10x &= 5.555\cdots\cdots \\ -)\quad x &= 0.555\cdots\cdots \\ \hline 9x &= 5 \end{array}$$

[A]　① 循環小数を x とおく。
② 循環している部分が□桁
→ $10^{\square}x$ を考える。
③ $10^{\square}x-x$ を計算し，x を求める。

2

[正解] ウエ：71，オカキ：333

[解説]

$x=0.\dot{2}1\dot{3}$ とおくと，[B]

右の計算より，

$999x=213$

$x=\dfrac{213}{999}=\dfrac{71}{333}$

$$\begin{array}{rl} 1000x &= 213.213213\cdots\cdots \\ -)\quad x &= 0.213213\cdots\cdots \\ \hline 999x &= 213 \end{array}$$

[B]　① 循環小数を x とおく。
② 循環している部分が□桁
→ $10^{\square}x$ を考える。
③ $10^{\square}x-x$ を計算し，x を求める。

3

[正解] ク：①

[解説]

$|-7|=7$ [C]

[C]　a の絶対値 $|a|$ は，数直線上で 0 から a までの距離を表す。

4

[正解] ケ：③

[解説]

$\pi=3.14\cdots<5$　より　$\pi-5<0$

よって　$|\pi-5|=-(\pi-5)=-\pi+5$ [D]

[D]　絶対値の性質
$a\geqq 0$ のとき，$|a|=a$
$a<0$ のとき，$|a|=-a$

5 **[正解] コ：①**

[解説]

$x \geqq 4$ のとき　$x-4 \geqq 0$

よって　$|x-4| = \boldsymbol{x-4}$ [E]

[E]　絶対値の性質
　$a \geqq 0$ のとき，$|a| = a$
　$a < 0$ のとき，$|a| = -a$

第 3 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] アイ：69，ウエ：59

[解説]

$$\frac{8-\sqrt{5}}{8+\sqrt{5}}=\frac{(8-\sqrt{5})^2}{(8+\sqrt{5})(8-\sqrt{5})}$$ [A]

$$=\frac{64-16\sqrt{5}+5}{64-5}=\mathbf{\frac{69-16\sqrt{5}}{59}}$$

[A]　分母の有理化
$(\sqrt{a})^2=a$
$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$
を利用する。

2

[正解] オ：5，カキ：10

[解説]

$$\frac{1}{\sqrt{5}+1+\sqrt{6}}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}+1)-\sqrt{6}}{\{(\sqrt{5}+1)+\sqrt{6}\}\{(\sqrt{5}+1)-\sqrt{6}\}}$$ [B]

$$=\frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{6}}{(\sqrt{5}+1)^2-6}=\frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{6}}{(5+2\sqrt{5}+1)-6}$$

$$=\frac{\sqrt{5}+1-\sqrt{6}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1-\sqrt{6})}{2\times5}$$

$$=\mathbf{\frac{5+\sqrt{5}-\sqrt{30}}{10}}$$

[B]　分母が簡単になるように工夫する。

3

[正解] ク：2，ケコ：11

[解説]

$$x=\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{11}-\sqrt{10}}{(\sqrt{11}+\sqrt{10})(\sqrt{11}-\sqrt{10})}$$

$$=\sqrt{11}-\sqrt{10}$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{11}+\sqrt{10}}{(\sqrt{11}-\sqrt{10})(\sqrt{11}+\sqrt{10})}$$

$$=\sqrt{11}+\sqrt{10}$$

$$x+y=(\sqrt{11}-\sqrt{10})+(\sqrt{11}+\sqrt{10})$$ [C]

$$=\mathbf{2\sqrt{11}}$$

[C]　x，y の分母をそれぞれ有理化してから式に代入する。

4 ［正解］サ：1

［解説］

$$x=\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{11}-\sqrt{10}}{(\sqrt{11}+\sqrt{10})(\sqrt{11}-\sqrt{10})}$$

$$=\sqrt{11}-\sqrt{10}$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}$$

$$=\sqrt{11}+\sqrt{10}$$

$$xy=(\sqrt{11}-\sqrt{10})(\sqrt{11}+\sqrt{10})$$ ［D］

$$=\mathbf{1}$$

［D］　x，y の分母をそれぞれ有理化してから式に代入する。

（別解）

$$xy=\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}$$

$$=\frac{1}{(\sqrt{11}+\sqrt{10})(\sqrt{11}-\sqrt{10})}$$

$$=\mathbf{1}$$

5 ［正解］シス：42

［解説］

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$ ［E］

［E］　x^2+y^2 のように，x と y を入れ替えても，もとの式と変わらない式を，x, y の対称式という。x, y の対称式は，基本対称式 $x+y$，xy で表すことができる。

ここで，

$$x=\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}$$

$$=\sqrt{11}-\sqrt{10}$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}$$

$$=\sqrt{11}+\sqrt{10}$$

$$x+y=2\sqrt{11}$$

$$xy=1$$

であるから，

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(2\sqrt{11})^2-2\cdot1=\mathbf{42}$$

第 3 講　PART3　確認問題 解答

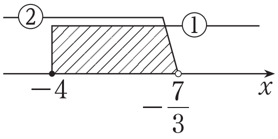
1

[正解] ア：4，イ：7，ウ：3

[解説]

$$\begin{cases}4x+3 \geqq 3x-1 & \cdots\cdots ① \\ 4x-2>7x+5 & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

[A]



①より　$x \geqq -4$

②より　$-3x>7$　$x<-\frac{7}{3}$

①と②の共通範囲をとって　$\boldsymbol{-4 \leqq x<-\frac{7}{3}}$

> [A]　連立不等式の解法
> ①それぞれの不等式を解き，その解を数直線上に図示する。
> ②数直線の図より，それぞれの解の共通範囲を求める。

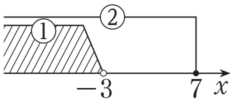
2

[正解] エ：3

[解説]

$$\begin{cases}5(x+1)<3x-1 & \cdots\cdots ① \\ 3x-1 \leqq 2(x+3) & \cdots\cdots ②\end{cases}$$

[B]



①より　$2x<-6$　　$x<-3$

②より　$x \leqq 7$

①と②の共通範囲をとって　$\boldsymbol{x<-3}$

> [B]　不等式 $A<B<C$ は連立不等式
> $\begin{cases}A<B \\ B<C\end{cases}$
> と同じである。

3

[正解] オ：5

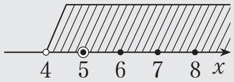
[解説]

$\frac{x+2}{3}<\frac{3}{4}x-1$　より　$4(x+2)<9x-12$

$4x+8<9x-12$　　$-5x<-20$　　$x>4$ [C]

これを満たす最小の整数 x は　$\boldsymbol{x=5}$

> [C]　$x>4$ は端点 4 を含まないことに注意する。



第3講　PART4　確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イウ：-5

[解説]

$|x+2|=3$　より　$x+2=\pm 3$ [A]

$x+2=3$　より　$x=1$

$x+2=-3$　より　$x=-5$

よって　$\boldsymbol{x=1,\ -5}$

> [A]　絶対値を含む方程式
> $c>0$ のとき，
> 方程式 $|x|=c$ の解は　$x=\pm c$

2

[正解] エオ：-2，カ：8，キ：3

[解説]

$|3x-1|\leqq 7$　より　$-7\leqq 3x-1\leqq 7$ [B]

$-6\leqq 3x\leqq 8$　よって　$\boldsymbol{-2\leqq x\leqq \frac{8}{3}}$

> [B]　絶対値を含む不等式
> $c>0$ のとき，
> 不等式 $|x|<c$ の解は　$-c<x<c$

3

[正解] ク：2，ケコ：10

[解説]

$|x-6|\geqq 4$　より　$x-6\leqq -4$，$4\leqq x-6$ [C]

よって　$\boldsymbol{x\leqq 2,\ 10\leqq x}$

> [C]　絶対値を含む不等式
> $c>0$ のとき，
> 不等式 $|x|>c$ の解は　$x<-c$，$c<x$

4

[正解] サ：1，シ：4

[解説]

$|x+1|=-3x$

$x\geqq -1$ のとき　$x+1=-3x$　$4x=-1$

$$x=-\frac{1}{4}$$

これは　$x\geqq -1$ を満たす。 [D]

$x<-1$ のとき　$-x-1=-3x$　$2x=1$

$$x=\frac{1}{2}$$

これは　$x<-1$ を満たさず不適。 [D]

したがって，求める解は　$\boldsymbol{x=-\frac{1}{4}}$

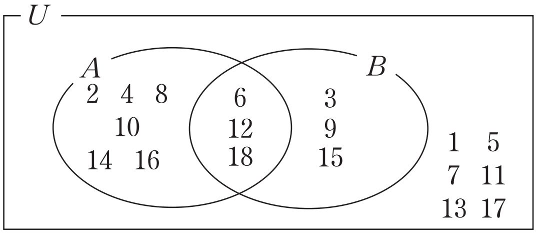
> [D]　$a\geqq 0$ のとき，$|a|=a$
> $a<0$ のとき，$|a|=-a$
> であることを用いて，絶対値記号をはずす。
> 方程式を解き，求めた解が場合分けの条件を満たすかどうか確認する。

第 4 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：6，イウ：12，エオ：18

[解説]



上図より

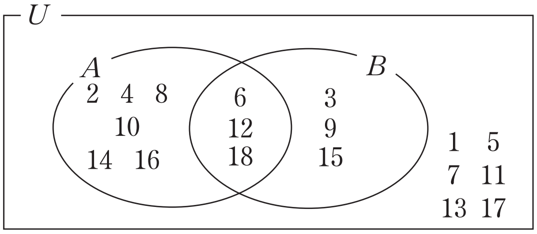
$A \cap B = \{6,\ 12,\ 18\}$ [A]

> [A]　共通部分 $A \cap B$
> $A \cap B$ は集合 A と B の両方に属する要素全体の集合である。

2

[正解] カ：6，キク：18

[解説]



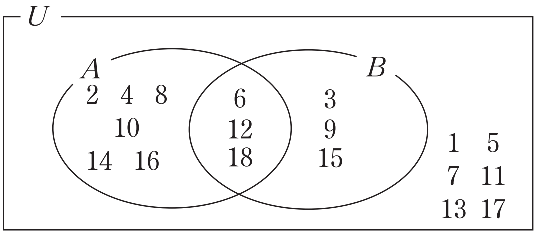
上図より

$A \cup B = \{2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 18\}$ [B]

> [B]　和集合 $A \cup B$
> $A \cup B$ は集合 A と B の少なくとも一方に属する要素全体の集合である。

3 **[正解]** ケ：3，コ：9，サシ：15

[解説]



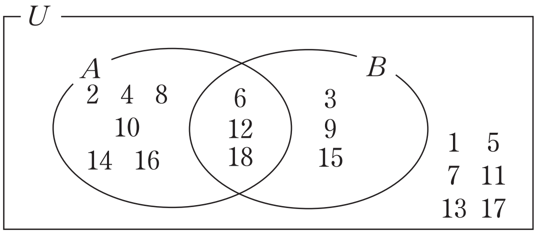
上図より

$\overline{A}\cap B=\{3,\ 9,\ 15\}$ [C]

[C]　集合はベン図をかいて考える。$\overline{A}\cap B$ は集合 A に属さず B に属する要素全体の集合である。

4 **[正解]** ス：7，セソ：11

[解説]



上図より

$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\{1,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17\}$ [D]

[D]　ド・モルガンの法則

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

第 4 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

$x^2=9$ より　$x=3$ または $x=-3$

よって　「$x^2=9$ ならば $x=3$ である」は**偽（反例 $x=-3$）** [A]

[A]　命題の真偽の判定
命題 $p \Longrightarrow q$ について，仮定 p を満たすが結論 q を満たさないものをその命題の反例といい，反例があるならば命題は偽となる。

2

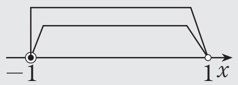
[正解] イ：①

[解説]

$-1 \leqq x < 1$ は　$-1 < x < 1$ を含む。[B]

よって　**真**

[B]　数直線で表す。



3

[正解] ウ：①

[解説]

整数 x が 6 の倍数のとき $x=6k$（k は整数）と表せる。

このとき $x=6k=3\times 2k$ であり，$2k$ は整数より x は 3 の倍数である。

よって「x が 6 の倍数ならば，x は 3 の倍数である」は**真** [C]

[C]　命題の真偽の判定
命題 $p \Longrightarrow q$ が真であることは，条件 p を満たすものはすべて条件 q を満たすことである。

4

[正解] エ：④

[解説]

$x^2=3x$ より $x^2-3x=0$　$x(x-3)=0$

$x=0,\ 3$

よって「$x^2=3x$ ならば $x=0$ である」は **偽　（反例 $x=3$）** [D]

[D]　命題の真偽の判定
命題 $p \Longrightarrow q$ について，仮定 p を満たすが結論 q を満たさないものをその命題の反例といい，反例があるならば命題は偽となる。

第 4 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：①

[解説]

$x^2-25=0$　より　$x=\pm 5$

よって　$p \Longrightarrow q$ は真

$q \Longrightarrow p$ は真

したがって，条件 p は条件 q であるための**必要十分条件である。** [A]

> [A]　必要条件・十分条件
> 命題 $p \Longrightarrow q$ が真であるとき，
> p は q であるための十分条件
> q は p であるための必要条件
> という。
> 命題 $p \Longleftrightarrow q$ が成り立つとき，
> p は q であるための必要十分条件
> という。

2

[正解] イ：③

[解説]

$p \Longrightarrow q$ は真

$q \Longrightarrow p$ は偽

（反例　$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}=2$　かつ　$\mathrm{BC}=\mathrm{DA}=3$）

したがって，条件 p は条件 q であるための**十分条件であるが必要条件ではない。** [B]

> [B]　必要条件・十分条件
> 命題 $p \Longrightarrow q$ が真であるとき，
> p は q であるための十分条件
> q は p であるための必要条件
> という。
> 命題 $p \Longleftrightarrow q$ が成り立つとき，
> p は q であるための必要十分条件
> という。

3

[正解] ウ：④

[解説]

$p \Longrightarrow q$ は偽（反例　$x=-1$，$y=0$）

$q \Longrightarrow p$ は偽（反例　$x=1$，$y=-1$）

したがって，条件 p は条件 q であるための**必要条件でも十分条件でもない。** [C]

> [C]　必要条件・十分条件
> $p \Longrightarrow q$，$q \Longrightarrow p$ がともに偽ならば，
> p は q であるための必要条件でも十分条件でもない。

4 [正解] エ：②

[解説]

x が 2 の倍数　かつ　3 の倍数のとき，x は 6 の倍数

よって　$p \Longrightarrow q$ は偽（反例　$x=6$）

　　　　$q \Longrightarrow p$ は真

したがって，条件 p は条件 q であるための**必要条件であるが十分条件ではない。** [D]

> [D]　必要条件・十分条件
> 命題 $p \Longrightarrow q$ が真であるとき，
> p は q であるための十分条件
> q は p であるための必要条件
> という。

5 [正解] オ：④

[解説]

$\overline{p \text{かつ} q} \iff \overline{p}$ または $\overline{q}$ [E]

したがって，「$x \geqq -2$　かつ　$y > 3$」の否定は

「$\boldsymbol{x < -2}$　**または**　$\boldsymbol{y \leqq 3}$」

> [E]　「p かつ q」の否定
> $\overline{p \text{かつ} q} \iff \overline{p}$ または $\overline{q}$

6 [正解] カ：②

[解説]

$\overline{p \text{または} q} \iff \overline{p}$ かつ $\overline{q}$ [F]

したがって，「m，n の少なくとも一方は 5 の倍数」の否定は「$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ **はともに 5 の倍数でない**」

> [F]　「p または q」の否定
> $\overline{p \text{または} q} \iff \overline{p}$ かつ $\overline{q}$

第 4 講　PART4　確認問題 解答

1

[正解] ア：②

[解説]

「$x^2 \geqq 9 \Longrightarrow x \geqq 3$」

この逆は「$\boldsymbol{x \geqq 3 \Longrightarrow x^2 \geqq 9}$」[A]

これは真

> [A]　逆
> 命題 $p \Longrightarrow q$ に対して，
> $q \Longrightarrow p$ を逆という。
> 命題とその逆の真偽は一致するとは限らない。

2

[正解] イ：③

[解説]

「$x+y=4 \Longrightarrow x \leqq 2$　または　$y \leqq 2$」

この裏は「$\boldsymbol{x+y \neq 4 \Longrightarrow x>2}$ **かつ** $\boldsymbol{y>2}$」[B]

これは偽（反例　$x=3,\ y=-1$）

> [B]　裏
> 命題 $p \Longrightarrow q$ に対して，
> $\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$ を裏という。
> ある命題の逆と裏の真偽は一致する。

3

[正解] ウ：③

[解説]

「n は 6 の倍数でない $\Longrightarrow$ n は 3 の倍数でない」

この対偶は「$\boldsymbol{n}$ **は 3 の倍数** $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{n}$ **は 6 の倍数**」[C]

これは偽（反例　$n=9$）

> [C]　対偶
> 命題 $p \Longrightarrow q$ に対して，
> $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ を対偶という。
> 命題とその対偶の真偽は一致する。

4

[正解] エ：③，オ：3，カ：9，キ：3，ク：④

[証明]

この命題の**対偶**は「n が 3 の倍数ならば，n^2 は 3 の倍数である」。これを示す。 [D]

n が 3 の倍数のとき，n は整数 k を用いて

$$n=3k$$

と表される。このとき，

$$n^2=(3k)^2=9k^2=3\cdot 3k^2$$

$3k^2$ は整数であるから，n^2 は 3 の倍数である。

よって，対偶が**真**より，もとの命題も真である。

> [D]　命題 $p\Longrightarrow q$ とその対偶 $\overline{q}\Longrightarrow\overline{p}$ の真偽は一致する。
> 対偶が真であることを示すことで，もとの命題が真であることを証明することができる。

5

[正解] ケ：①，コ：2，サ：2，シ：②

[証明]

$\sqrt{3}+\sqrt{6}$ が無理数でないと仮定すると，$\sqrt{3}+\sqrt{6}$ は**有理数**であるから， [E]

$$\sqrt{3}+\sqrt{6}=r\quad(r\text{ は有理数})$$

とおくと

$$(\sqrt{3}+\sqrt{6})^2=r^2$$

$$9+6\sqrt{2}=r^2\qquad \sqrt{2}=\frac{r^2-9}{6}$$

r は有理数より，$\dfrac{r^2-9}{6}$ も有理数である。

よって，$\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって，$\sqrt{3}+\sqrt{6}$ は**無理数**である。

> [E]　背理法
> ある命題を証明するとき，その命題が成り立たないと仮定すると矛盾が生じることを示し，それによってもとの命題が成り立つことを証明する方法を背理法という。

第 5 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イウ：17，エ：3，オカ：14，
キク：17

[解説]

$f(x)=3x^2-2x+1$ について

$f(0)=3\cdot 0^2-2\cdot 0+1=0-0+1=\mathbf{1}$ [A]

$f(-2)=3\cdot(-2)^2-2\cdot(-2)+1=12+4+1$

$=\mathbf{17}$

$f(a-2)=3(a-2)^2-2(a-2)+1$

$=3a^2-12a+12-2a+4+1$

$=\mathbf{3a^2-14a+17}$

［A］　x の値を１つ決めると，それに対応して y の値が１つだけ決まるとき，“y は x の関数である”といい，$y=f(x)$ と表す。
このとき，$x=a$ のときの y の値を $f(a)$ と表す。

2

[正解] ケコ：-4，サ：0，シ：④，ス：②

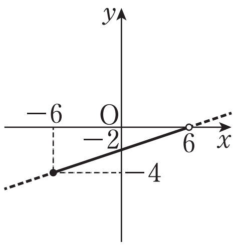
[解説]

$y=\frac{1}{3}x-2$ において

$x=-6$ のとき　$y=\frac{1}{3}\cdot(-6)-2=-4$

$x=6$ のとき　$y=\frac{1}{3}\cdot 6-2=0$

よって，グラフは下図実線部分。



値域は　$\mathbf{-4\leqq y<0}$

最大値は　**なし** [B]

$x=-6$ のとき　最小値 $\mathbf{-4}$

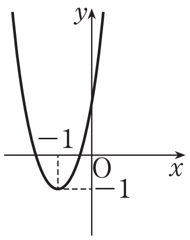
［B］　関数の値域に最大の値があるとき，その値をこの関数の最大値といい，最小の値があるとき，その値をこの関数の最小値という。
1 次関数の最大値，最小値は，定義域の端の点に注目する。

第 5 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] アイ：-1，ウエ：-1，オカ：-1，キ：②

[解説]



$y=3(x+1)^2-1$

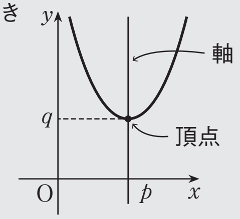
軸は　直線 $\boldsymbol{x=-1}$ [A]

頂点は　点 $(\boldsymbol{-1,\ -1})$

グラフは　②

[A]　$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

$a>0$ のとき



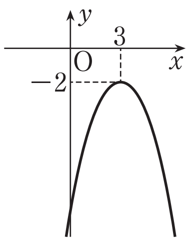
軸は，直線 $x=p$

頂点は，点 $(p,\ q)$

2

[正解] ク：3，ケ：3，コサ：-2，シ：④

[解説]



$y=-(x-3)^2-2$

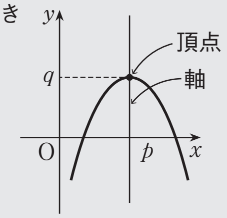
軸は　直線 $\boldsymbol{x=3}$ [B]

頂点は　点 $(\boldsymbol{3,\ -2})$

グラフは　④

[B]　$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

$a<0$ のとき



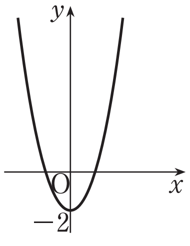
軸は，直線 $x=p$

頂点は，点 $(p,\ q)$

3

[正解] ス：0，セ：0，ソタ：-2，チ：③

[解説]



$y=x^2-2$

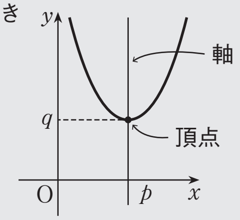
軸は　直線 $\boldsymbol{x=0}$ [C]

頂点は　点 $(\boldsymbol{0,\ -2})$

グラフは　③

[C]　$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

$a>0$ のとき

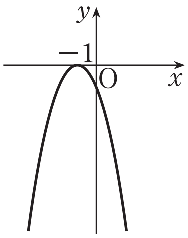


軸は，直線 $x=p$

頂点は，点 $(p,\ q)$

4 [正解] ツテ：-1，トナ：-1，ニ：0，ヌ：①

[解説]



$y=-\dfrac{1}{2}(x+1)^2$

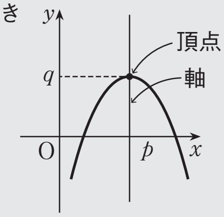
軸は　直線 $\boldsymbol{x=-1}$ [D]

頂点は　点 $(\boldsymbol{-1,\ 0})$

グラフは　①

[D]　$y=a(x-p)^2+q$ のグラフ

$a<0$ のとき



軸は，直線 $x=p$

頂点は，点 $(p,\ q)$

第 5 講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：1，イ：2，ウ：1，エ：2，オ：7，

カ：4

[解説]

$$y=x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+2$$ [A]

$$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$$

軸　直線 $\boldsymbol{x=\frac{1}{2}}$　　頂点　点 $\boldsymbol{\left(\frac{1}{2},\ \frac{7}{4}\right)}$

[A]　平方完成
2 次式 ax^2+bx+c を
$a(x-p)^2+q$ の形に変形すること。
平方完成では，以下の変形を用いる。

$$x^2+bx=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

2 **[正解]** キ：1，ク：1，ケ：0

[解説]

$$y=-2x^2+4x-2$$ [B]

$$=-2(x^2-2x)-2$$

$$=-2\{(x-1)^2-1\}-2$$

$$=-2(x-1)^2$$

軸　直線 $\boldsymbol{x=1}$　　頂点　点 $\boldsymbol{(1,\ 0)}$

[B]　平方完成
2 次式 ax^2+bx+c を
$a(x-p)^2+q$ の形に変形すること。
平方完成では，以下の変形を用いる。

$$x^2+bx=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

3 **[正解]** コ：2，サ：3，シ：2，ス：3，セ：2，
ソ：3

[解説]

$y=3x^2+4x+2$ [C]

$=3\left(x^2+\frac{4}{3}x\right)+2$

$=3\left\{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}\right\}+2$

$=3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$

軸　直線 $x=-\frac{2}{3}$　　頂点　点 $\left(-\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

[C]　2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ
2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを平行移動した放物線で
軸は 直線 $x=-\frac{b}{2a}$，
頂点は 点 $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

4 **[正解]** タ：3，チ：3，ツ：5，テ：2

[解説]

$y=-\frac{1}{2}x^2-3x-7$ [D]

$=-\frac{1}{2}(x^2+6x)-7$

$=-\frac{1}{2}\{(x+3)^2-9\}-7$

$=-\frac{1}{2}(x+3)^2-\frac{5}{2}$

軸　直線 $x=-3$　　頂点　点 $\left(-3,\ -\frac{5}{2}\right)$

[D]　2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ
2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを平行移動した放物線で
軸は 直線 $x=-\frac{b}{2a}$，
頂点は 点 $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

第５講　PART4　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3，イ：2，ウエ：11，オ：2

[解説]

$y=2x^2-4x-1=2(x^2-2x)-1=2(x-1)^2-3$

……①

放物線①の頂点は　点 $(1,\ -3)$

$y=2x^2+2x+3=2(x^2+x)+3=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$

……②

放物線②の頂点は　点 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)$

よって，点 $(1,\ -3)$ が，点 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ に重なるように平行移動すればよい。［A］

したがって，①のグラフを

x 軸方向に $-\frac{3}{2}$，y 軸方向に $\frac{11}{2}$ だけ平行移動すればよい。

［A］　放物線を平行移動するときは，頂点の移動に注目する。
放物線①の頂点 $(1,\ -3)$ を②の頂点 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ に重ねるには，x 軸方向に $-\frac{1}{2}-1$，y 軸方向に $\frac{5}{2}-(-3)$ だけ平行移動すればよい。

2 [正解] カ：③，キ：①，ク：④

[解説]

$y=x^2-6x+5=(x-3)^2-4$　……①

よって，放物線①の頂点は　点 $(3,\ -4)$

放物線①を x 軸に関して対称移動すると，その頂点は点 $(3,\ 4)$ に移動し，グラフの上下が反転するため，x^2 の係数は -1 となる。[B]

よって，求める放物線の方程式は

$$y=-(x-3)^2+4=\boldsymbol{-x^2+6x-5}$$

放物線①を y 軸に関して対称移動すると，その頂点は点 $(-3,\ -4)$ に移動する。[B]

よって，求める放物線の方程式は

$$y=(x+3)^2-4=\boldsymbol{x^2+6x+5}$$

放物線①を原点に関して対称移動すると，その頂点は点 $(-3,\ 4)$ に移動し，グラフの上下が反転するため，x^2 の係数は -1 となる。[B]

よって，求める放物線の方程式は

$$y=-(x+3)^2+4=\boldsymbol{-x^2-6x-5}$$

[B]　点 $(a,\ b)$ を
x 軸に関して対称移動　点 $(a,\ -b)$
y 軸に関して対称移動　点 $(-a,\ b)$
原点に関して対称移動　点 $(-a,\ -b)$
にそれぞれ移動する。
また，放物線を対称移動して得られる放物線の方程式は，凸方向の変化にも注目する。

第 6 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：4，ウエ：17，オ：4

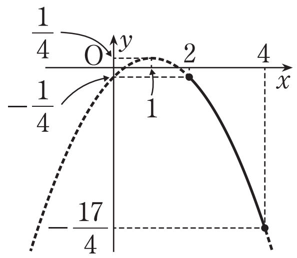
[解説]

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2}(x^2-2x)-\frac{1}{4}$$

$$=-\frac{1}{2}\{(x-1)^2-1\}-\frac{1}{4}$$

$$=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{4}$$ [A]

関数 $y=f(x)$ のグラフは下図実線部分。



よって　$2\leqq x\leqq 4$ のとき

最大値　$f(2)=-\frac{1}{4}$ [A]

最小値　$f(4)=-\frac{17}{4}$

［A］　定義域に制限がある場合の２次関数の最大値，最小値は，グラフを利用して求める。
① 平方完成し，グラフを点線でかく。
② ①のグラフにおいて，与えられた定義域に相当する部分を実線にする。
③ 頂点と端点に注目し，最大値，最小値を求める。

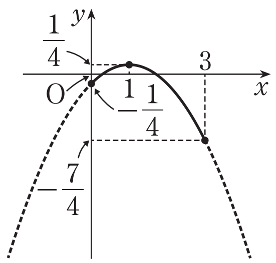
2 [正解] カ：1，キ：4，ク：7，ケ：4

[解説]

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{4}$$

$$=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{4}$$ [B]

関数 $y=f(x)$ のグラフは下図実線部分。



よって　$0 \leqq x \leqq 3$ のとき

最大値　$f(1)=\frac{1}{4}$ [B]

最小値　$f(3)=-\frac{7}{4}$

[B]　定義域に制限がある場合の２次関数の最大値，最小値は，グラフを利用して求める。
① 平方完成し，グラフを点線でかく。
② ①のグラフにおいて，与えられた定義域に相当する部分を実線にする。
③ 頂点と端点に注目し，最大値，最小値を求める。

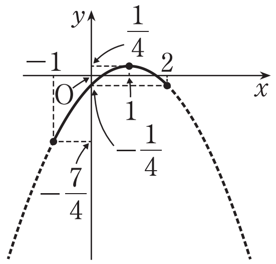
3 **[正解]** コ：1，サ：4，シ：7，ス：4

[解説]

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{4}$$

$$=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{4}$$ [C]

関数 $y=f(x)$ のグラフは下図実線部分。



よって　$-1\leqq x\leqq 2$ のとき

最大値　$f(1)=\frac{1}{4}$ [C]

最小値　$f(-1)=-\frac{7}{4}$

［C］　定義域に制限がある場合の２次関数の最大値，最小値は，グラフを利用して求める。
① 平方完成し，グラフを点線でかく。
② ①のグラフにおいて，与えられた定義域に相当する部分を実線にする。
③ 頂点と端点に注目し，最大値，最小値を求める。

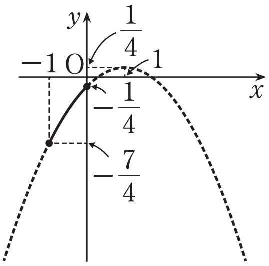
4　**[正解]** セ：1，ソ：4，タ：7，チ：4

[解説]

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{4}$$

$$=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{4}$$ [D]

関数 $y=f(x)$ のグラフは下図実線部分。



よって　$-1\leqq x\leqq 0$ のとき

最大値　$f(0)=-\frac{1}{4}$ [D]

最小値　$f(-1)=-\frac{7}{4}$

[D]　定義域に制限がある場合の 2 次関数の最大値，最小値は，グラフを利用して求める。

① 平方完成し，グラフを点線でかく。

② ①のグラフにおいて，与えられた定義域に相当する部分を実線にする。

③ 頂点と端点に注目し，最大値，最小値を求める。

第６講　PART2　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：③，イ：⑦，ウ：⑧，エ：③，オ：⑥

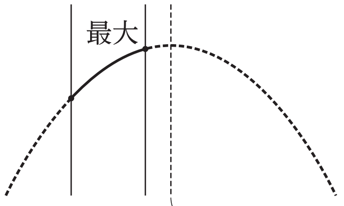
[解説]

$y=-x^2+6x-3=-(x^2-6x)-3$

$=-(x-3)^2+6$

グラフの軸は　$x=3$

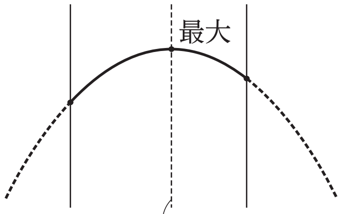
$1<a<3$ のとき，グラフは下図実線部分。［A］



よって

$x=\boldsymbol{a}$ で　最大値　$f(a)=\boldsymbol{-a^2+6a-3}$ をとる

$3\leqq a$ のとき，グラフは下図実線部分。［A］



よって

$x=\boldsymbol{3}$ で　最大値　$f(3)=\boldsymbol{6}$ をとる

［A］　定義域が変化する場合の最大
（グラフが上に凸の放物線の場合）
軸が定義域に含まれる場合と含まれない場合で場合分けを行う。

2 [正解] カ：⑤，キ：①，ク：②，ケ：①，コ：⑤
サ：②，シ：⑦，ス：⑧

[解説]

$y=-x^2+6x-3$

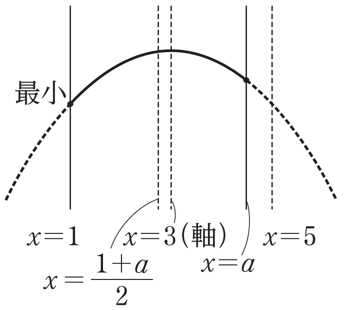
$=-(x-3)^2+6$

グラフの軸は　$x=3$

定義域 $1 \leqq x \leqq a$ の中央は　$x=\dfrac{1+a}{2}$

$\dfrac{1+a}{2}<3$　つまり　$1<a<\mathbf{5}$ のとき　[B]

グラフは下図実線部分。

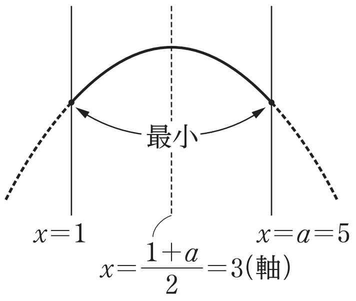


よって

$x=\mathbf{1}$ で　最小値　$f(1)=\mathbf{2}$ をとる

$\dfrac{1+a}{2}=3$　つまり　$a=\mathbf{5}$ のとき　[B]

グラフは下図実線部分。



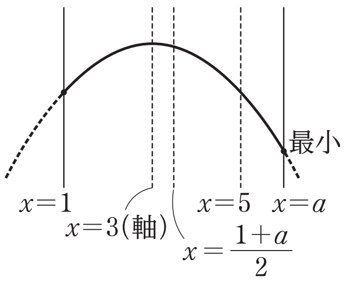
よって

$x=\mathbf{1}, \mathbf{5}$ で　最小値　$f(1)=f(5)=\mathbf{2}$ をとる

[B]　定義域が変化する場合の最小
（グラフが上に凸の放物線の場合）
軸が定義域の中央にある場合を境目として場合分けを行う。

$3<\dfrac{1+a}{2}$　つまり　$\mathbf{5}<a$ のとき [B]

グラフは下図実線部分。



よって

$x=\boldsymbol{a}$ で　最小値　$f(a)=\boldsymbol{-a^2+6a-3}$ をとる

第 6 講　PART3　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：②，イ：⑤，ウ：③，エ：④

[解説]

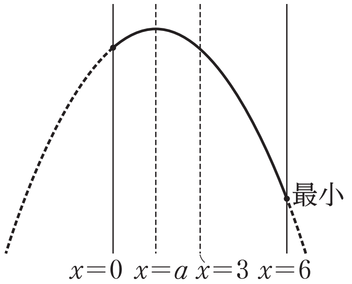
$f(x)=-3x^2+6ax+2a+1$

$\quad=-3(x-a)^2+3a^2+2a+1$

よって，このグラフの軸は　$x=a$

定義域 $0\leqq x\leqq 6$ の中央は　$x=3$

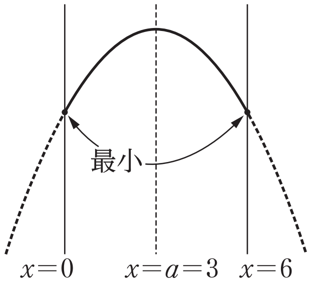
$a<3$ のとき　グラフは下図実線部分。 [A]



よって，$x=6$ で

　　最小値　$f(6)=\mathbf{38a-107}$

$a=3$ のとき　グラフは下図実線部分。 [A]

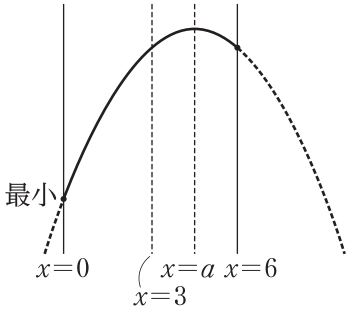


よって，$x=0$，6 で

　　最小値　$f(0)=f(6)=\mathbf{7}$

[A]　グラフが上に凸の放物線である 2 次関数の最小は，軸が定義域の中央より左にある場合，中央にある場合，中央より右にある場合で場合分けを行い求める。

$3 < a$ のとき　グラフは下図実線部分。 [A]



よって，$x=0$ で

最小値　$f(0) = \mathbf{2a+1}$

2 [正解] オ：⑦，カ：④，キ：②，ク：⑥，ケ：⑤

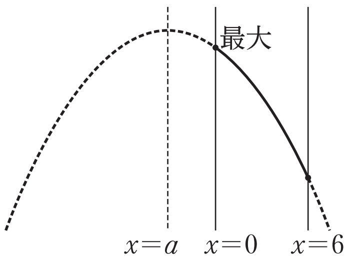
[解説]

$f(x)=-3x^2+6ax+2a+1$

$\quad =-3(x-a)^2+3a^2+2a+1$

よって，このグラフの軸は　$x=a$

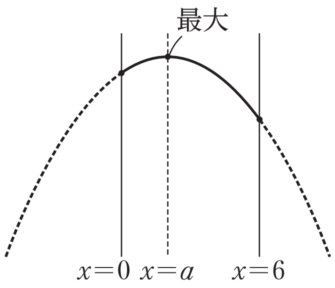
$a<0$ のとき　グラフは下図実線部分。 [B]



よって，$x=0$ で

最大値　$f(0)=\mathbf{2a+1}$

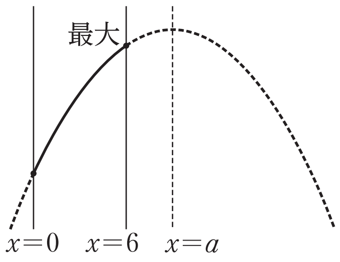
$0\leqq a\leqq 6$ のとき　グラフは下図実線部分。 [B]



よって，$x=a$ で

最大値　$f(a)=\mathbf{3a^2+2a+1}$

$6<a$ のとき　グラフは下図実線部分。 [B]



よって，$x=6$ で

最大値　$f(6)=\mathbf{38a-107}$

[B]　グラフが上に凸の放物線である 2 次関数の最大は，軸が定義域の左外にある場合，定義域に含まれる場合，定義域の右外にある場合で場合分けを行い求める。

第 6 講　PART4　確認問題 解答

1

[正解] ア：$-$，イ：1，ウ：4

[解説]

$x=-1$ のとき最大値 4 をとることにより，求める 2 次関数の式は $y=a(x+1)^2+4$ $(a<0)$ と表すことができる。[A]

このグラフが点 $(2,\ -5)$ を通るから

$$-5=a(2+1)^2+4$$
$$-5=9a+4$$
$$9a=-9$$
$$a=-1$$

これは $a<0$ を満たす。

よって，求める 2 次関数は　$\boldsymbol{y=-(x+1)^2+4}$

[A]　2 次関数の決定
次のように式をおく。
・グラフの頂点や軸の情報が与えられている場合
$\Longrightarrow y=a(x-p)^2+q$
・グラフの頂点や軸の情報が与えられていない場合
$\Longrightarrow y=ax^2+bx+c$

2

[正解] エ：3，オ：2，カ：1

[解説]

軸が直線 $x=2$ であることにより，求める 2 次関数の式は $y=a(x-2)^2+q$ と表すことができる。[B]

グラフが 2 点 $(-1,\ 28)$，$(1,\ 4)$ を通るから

$$\begin{cases} 28=9a+q \\ 4=a+q \end{cases}$$

これを解いて

$$\begin{cases} a=3 \\ q=1 \end{cases}$$

よって，求める 2 次関数は　$\boldsymbol{y=3(x-2)^2+1}$

[B]　2 次関数の決定
次のように式をおく。
・グラフの頂点や軸の情報が与えられている場合
$\Longrightarrow y=a(x-p)^2+q$
・グラフの頂点や軸の情報が与えられていない場合
$\Longrightarrow y=ax^2+bx+c$

3 **[正解]** キ：2，ク：3，ケ：7

[解説]

求める２次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく。 [C]

このグラフが３点 (1, 6)，(−2, 21)，(2, 9) を通るから

$$\begin{cases} 6=a+b+c & \cdots\cdots① \\ 21=4a-2b+c & \cdots\cdots② \\ 9=4a+2b+c & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

② − ①より　$3a-3b=15$　　$a-b=5$　……④

③ − ②より　$4b=-12$　　$b=-3$　……⑤

④，⑤より　$a=2$

このとき　①より　$c=7$

よって，求める２次関数は　$\boldsymbol{y=2x^2-3x+7}$

[C]　２次関数の決定
次のように式をおく。
・グラフの頂点や軸の情報が与えられている場合
$\Longrightarrow y=a(x-p)^2+q$
・グラフの頂点や軸の情報が与えられていない場合
$\Longrightarrow y=ax^2+bx+c$

第７講　PART1　確認問題 解答

1　[正解] ア：①

[解説]

判別式を D とする。

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot(-1)=4+1=5>0$$ [A]

よって，**実数解の個数は　2 個** [B]

実数解は　$x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\cdot(-1)}}{1}$

$=2\pm\sqrt{5}$

[A]　2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の判別式を D とすると，
$\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$

[B]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 $D=b^2-4ac$ について
$D>0 \Longleftrightarrow$ 異なる 2 つの実数解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ をもつ
$D=0 \Longleftrightarrow$ ただ 1 つの実数解（重解）$x=-\dfrac{b}{2a}$ をもつ
$D<0 \Longleftrightarrow$ 実数解をもたない

2　[正解] イ：③

[解説]

判別式を D とする。

$$D=1^2-4\cdot(-1)\cdot(-3)=1-12=-11<0$$

よって，**実数解の個数は　0 個** [C]

[C]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 $D=b^2-4ac$ について
$D>0 \Longleftrightarrow$ 異なる 2 つの実数解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ をもつ
$D=0 \Longleftrightarrow$ ただ 1 つの実数解（重解）$x=-\dfrac{b}{2a}$ をもつ
$D<0 \Longleftrightarrow$ 実数解をもたない

3　[正解] ウ：④

[解説]

判別式を D とする。

$$\frac{D}{4}=6^2-4\cdot 9=36-36=0$$

よって，**実数解の個数は　1 個** [D]

実数解は　$x=-\dfrac{12}{2\cdot 4}=-\dfrac{3}{2}$

[D]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式 $D=b^2-4ac$ について
$D>0 \Longleftrightarrow$ 異なる 2 つの実数解 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ をもつ
$D=0 \Longleftrightarrow$ ただ 1 つの実数解（重解）$x=-\dfrac{b}{2a}$ をもつ
$D<0 \Longleftrightarrow$ 実数解をもたない

4 **[正解]** **エ**：3，**オ**：1，**カ**：2，**キク**：11，**ケ**：3，

コ：2

[解説]

この方程式の判別式を D とすると，

$$D=\{-(m+1)\}^2-4\cdot4\cdot(m-2)$$

$$=m^2-14m+33$$

重解をもつための条件は $D=0$ [E]

よって　$m^2-14m+33=0$

$(m-3)(m-11)=0$　　$m=3,\ 11$

また，重解は　$x=-\dfrac{-(m+1)}{2\cdot4}=\dfrac{m+1}{8}$ より，[E]

$m=3$ のとき　重解 $x=\dfrac{1}{2}$，

$m=11$ のとき　重解 $x=\dfrac{3}{2}$

[E]　2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，
$D=b^2-4ac=0$ のとき
ただ1つの実数解（重解）
$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{0}}{2a}=-\dfrac{b}{2a}$
をもつ

第 7 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：①

[解説]

2 次方程式 $x^2-5x+3=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot3=13>0$$

よって，x 軸と**異なる 2 点で交わる。** [A]

共有点の x 座標は，2 次方程式 $x^2-5x+3=0$ の実数解である。

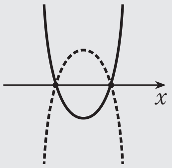
$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot3}}{2\cdot1}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$$

よって，求める共有点の座標は

$$\boldsymbol{\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2},\ 0\right),\ \left(\frac{5-\sqrt{13}}{2},\ 0\right)}$$

[A]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸との位置関係は次のようになる。

$D>0$
⇕
異なる 2 点で交わる



2

[正解] イ：③

[解説]

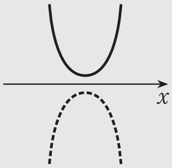
2 次方程式 $x^2-4x+12=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot12=-8<0$$

よって，x 軸と**共有点をもたない。** [B]

[B]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸との位置関係は次のようになる。

$D<0$
⇕
共有点をもたない



3 [正解] ウ：②

[解説]

2 次方程式 $\frac{1}{3}x^2+4x+12=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=2^2-\frac{1}{3}\cdot 12=0$$

よって，x 軸と**接する**。 [C]

共有点の x 座標は，2 次方程式

$\frac{1}{3}x^2+4x+12=0$ の実数解である。

$x^2+12x+36=0$　$(x+6)^2=0$　　$x=-6$

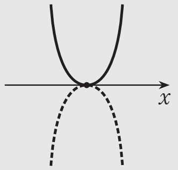
よって，求める共有点の座標は **$(-6,\ 0)$**

[C]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸との位置関係は次のようになる。

$D=0$

⇕

接する



4 [正解] エ：①

[解説]

2 次関数 $y=-x^2+3x+k+4$ のグラフと x 軸の共有点の個数は，2 次方程式 $-x^2+3x+k+4=0$ の実数解の個数と一致する。この方程式の判別式を D とすると

$$D=3^2-4\cdot(-1)\cdot(k+4)=4k+25$$

共有点をもたないのは，$D<0$ のときである。 [D]

よって，$4k+25<0$　より　$\boldsymbol{k<-\frac{25}{4}}$

[D]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸との位置関係は次のようになる。

$D>0 \Longleftrightarrow$ 異なる 2 点で交わる

$D=0 \Longleftrightarrow$ 接する

$D<0 \Longleftrightarrow$ 共有点をもたない

5 **[正解]** オ：③

[解説]

2 次関数 $y=-x^2+3x+k+4$ のグラフと x 軸の共有点の個数は，2 次方程式 $-x^2+3x+k+4=0$ の実数解の個数と一致する。この方程式の判別式を D とすると

$$D=3^2-4\cdot(-1)\cdot(k+4)=4k+25$$

共有点をもつのは，$D \geqq 0$ のときである。 [E]

よって，$4k+25 \geqq 0$　より　$\boldsymbol{k \geqq -\frac{25}{4}}$

[E]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると，2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸との位置関係は次のようになる。

$D>0 \Longleftrightarrow$ 異なる 2 点で交わる

$D=0 \Longleftrightarrow$ 接する

$D<0 \Longleftrightarrow$ 共有点をもたない

第７講　PART3　確認問題 解答

1

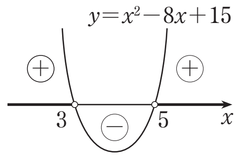
[正解] ア：3，イ：5

[解説]

$x^2-8x+15>0$　より　$(x-3)(x-5)>0$ [A]

よって，不等式の解は

$$x<3,\ 5<x$$



[A]　2 次不等式は 2 次関数のグラフをかいて考える。
2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わるとき，交点の x 座標を
$x=\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ とすると，
$ax^2+bx+c>0$ の解は，$x<\alpha,\ \beta<x$

2

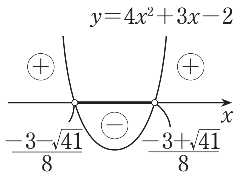
[正解] ウ：3，エオ：41，カ：8

[解説]

$4x^2+3x-2=0$ を解くと

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot4\cdot(-2)}}{2\cdot4}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{8}$$



よって，不等式の解は

$$\frac{-3-\sqrt{41}}{8}<x<\frac{-3+\sqrt{41}}{8}$$ [B]

[B]　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ のグラフが x 軸と異なる 2 点 $x=\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ で交わるとすると，
$ax^2+bx+c<0$ の解は，$\alpha<x<\beta$

3

[正解] キ：3，ク：7

[解説]

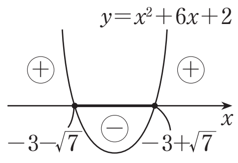
$-x^2-6x-2\geqq0$ の両辺に -1 をかけて

$x^2+6x+2\leqq0$

$x^2+6x+2=0$ を解くと

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-1\cdot2}}{1}$$

$$=-3\pm\sqrt{7}$$



よって，不等式の解は

$$-3-\sqrt{7}\leqq x\leqq-3+\sqrt{7}$$ [C]

[C]　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ のグラフが x 軸と異なる 2 点 $x=\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$ で交わるとすると，
$ax^2+bx+c\leqq0$ の解は，$\alpha\leqq x\leqq\beta$

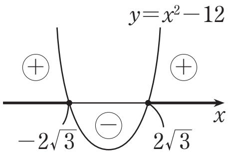
4 [正解] ケ：2，コ：3

[解説]

$x^2 \geqq 12$　より　$x^2-12 \geqq 0$

$x^2-12=0$ を解くと

$x^2=12$　　$x=\pm 2\sqrt{3}$



よって，不等式の解は

$\boldsymbol{x \leqq -2\sqrt{3}}$，$\boldsymbol{2\sqrt{3} \leqq x}$ [D]

[D]　2次関数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ のグラフが x 軸と異なる2点 $x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ で交わるとすると，
$ax^2+bx+c \geqq 0$ の解は，$x \leqq \alpha$，$\beta \leqq x$

第７講　PART4　確認問題 解答

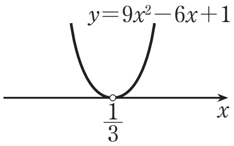
1

[正解] ア：②

[解説]

$9x^2-6x+1>0$　より　$(3x-1)^2>0$

よって，　$x=\frac{1}{3}$ 以外のすべての実数。 [A]



[A]　2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が重解 $x=\alpha$ をもつとき，$a>0$ とすると $ax^2+bx+c>0$ の解は α 以外のすべての実数

2

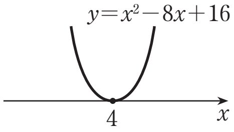
[正解] イ：④

[解説]

$-x^2+8x-16\geqq 0$　より　$x^2-8x+16\leqq 0$

$(x-4)^2\leqq 0$

よって　$x=4$ [B]



[B]　2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が重解 $x=\alpha$ をもつとき，$a>0$ とすると $ax^2+bx+c\leqq 0$ の解は $x=\alpha$

3

[正解] ウ：⑥

[解説]

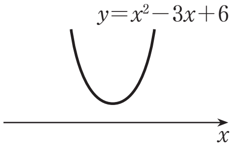
$-x^2+3x-6\geqq 0$　より　$x^2-3x+6\leqq 0$

$x^2-3x+6=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-3)^2-4\cdot1\cdot6=9-24=-15<0$$

x^2 の係数は正であるから，不等式 $x^2-3x+6\leqq 0$ の解はない。

すなわち $-x^2+3x-6\geqq 0$ の解はない。 [C]



[C]　2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が実数解をもたないとき，$a>0$ とすると $ax^2+bx+c\leqq 0$ の解はない

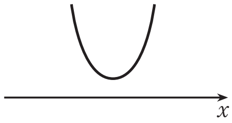
4 **[正解]** エ：⑤

[解説]

$x^2+5x+7=0$ の判別式を D とすると

$$D=5^2-4\cdot1\cdot7=25-28=-3<0$$

よって，不等式 $x^2+5x+7>0$ の解は**すべての実数**。



[D]

[D]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が実数解をもたないとき，$a>0$ とすると $ax^2+bx+c>0$ の解はすべての実数

第 8 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：6

[解説]

2 次方程式 $-x^2+(m+2)x-3m+2=0$ の判別式を D とすると

$$D=(m+2)^2-4\cdot(-1)\cdot(-3m+2)$$
$$=m^2-8m+12$$
$$=(m-2)(m-6)$$

グラフが x 軸と共有点をもつのは $D\geqq 0$ のときであるから [A]

$$(m-2)(m-6)\geqq 0$$

したがって　$\boldsymbol{m\leqq 2,\ 6\leqq m}$

[A]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると
　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸と共有点をもつ
$\Longleftrightarrow D\geqq 0$
　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸と共有点をもたない
$\Longleftrightarrow D<0$

2

[正解] ウ：2，エ：6

[解説]

2 次方程式 $-x^2+(m+2)x-3m+2=0$ の判別式を D とすると

$$D=(m+2)^2-4\cdot(-1)\cdot(-3m+2)$$
$$=m^2-8m+12$$
$$=(m-2)(m-6)$$

グラフが x 軸と共有点をもたないのは $D<0$ のときであるから [B]

$$(m-2)(m-6)<0$$

したがって　$\boldsymbol{2<m<6}$

[B]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると
　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸と共有点をもつ
$\Longleftrightarrow D\geqq 0$
　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが x 軸と共有点をもたない
$\Longleftrightarrow D<0$

3 [正解] オカ：-2，キ：2，ク：2，ケ：2

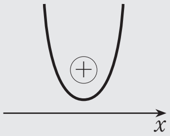
[解説]

2 次関数 $y=x^2+ax+2$ のグラフは下に凸の放物線である。よって，すべての実数 x について不等式が成り立つのは，このグラフが x 軸と共有点をもたないときである。したがって，2 次方程式 $x^2+ax+2=0$ の判別式を D とすると

$$D=a^2-4\cdot1\cdot2=a^2-8<0$$ [C]

よって　$\boldsymbol{-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}}$

[C]　$ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると
不等式 $ax^2+bx+c>0$ の解がすべての実数
$\Longleftrightarrow$　$a>0$ かつ $D<0$



第 8 講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：-1，ウ：1，エ：3

[解説]

$x^2+(a+5)x+3+a^2=0$　……①

$x^2-(3-a)x+(a+1)^2=0$　……②

について，①，②の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると

$$D_1=(a+5)^2-4\cdot1\cdot(3+a^2)$$
$$=-3a^2+10a+13$$
$$D_2=\{-(3-a)\}^2-4\cdot1\cdot(a+1)^2$$
$$=-3a^2-14a+5$$

①，②がともに実数解をもつ条件は，

$D_1 \geqq 0$　かつ　$D_2 \geqq 0$　のときである。

$D_1 \geqq 0$　より

$-3a^2+10a+13 \geqq 0$　　$3a^2-10a-13 \leqq 0$

$(3a-13)(a+1) \leqq 0$

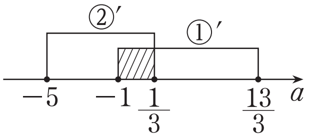
よって　$-1 \leqq a \leqq \frac{13}{3}$　……①′

$D_2 \geqq 0$　より

$-3a^2-14a+5 \geqq 0$　　$3a^2+14a-5 \leqq 0$

$(3a-1)(a+5) \leqq 0$

よって　$-5 \leqq a \leqq \frac{1}{3}$　……②′



[A]

[A]　2つの不等式を解き，その解を数直線上に図示する。

①′ と ②′ の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{-1 \leqq a \leqq \frac{1}{3}}$

2 **[正解]** **オカ**：-5，**キク**：-1，**ケ**：1，**コ**：3

サシ：13，**ス**：3

[解説]

$x^2+(a+5)x+3+a^2=0$　……①

$x^2-(3-a)x+(a+1)^2=0$　……②

について，①，②の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると

$$D_1=(a+5)^2-4\cdot1\cdot(3+a^2)$$
$$=-3a^2+10a+13$$
$$D_2=\{-(3-a)\}^2-4\cdot1\cdot(a+1)^2$$
$$=-3a^2-14a+5$$

①，②の一方のみが実数解をもつ条件は

$D_1\geqq0$　か　$D_2\geqq0$　のいずれか一方のみが成り立つときである。

$D_1\geqq0$　より

$$-3a^2+10a+13\geqq0 \qquad 3a^2-10a-13\leqq0$$
$$(3a-13)(a+1)\leqq0$$

よって　$-1\leqq a\leqq\dfrac{13}{3}$　……①′

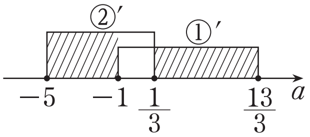
$D_2\geqq0$　より

$$-3a^2-14a+5\geqq0 \qquad 3a^2+14a-5\leqq0$$
$$(3a-1)(a+5)\leqq0$$

よって　$-5\leqq a\leqq\dfrac{1}{3}$　……②′

①′ と ②′ のいずれか一方のみが成り立つ範囲を求めて

$$\boldsymbol{-5\leqq a<-1,\ \frac{1}{3}<a\leqq\frac{13}{3}}$$ [B]



[B]　２つの不等式を解き，その解を数直線上に図示する。

第 8 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] アイ：-1

[解説]

$f(x)=x^2+2mx+m-2$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線である。$y=f(x)$ のグラフが x 軸の $x>-1$ の部分と $x<-1$ の部分で交わるための条件は $f(-1)<0$ である。 [A]

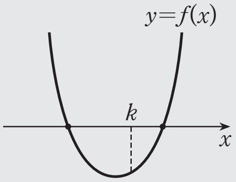
よって

$$f(-1)=(-1)^2+2m\cdot(-1)+m-2<0$$

$-m-1<0$　より　$\boldsymbol{m>-1}$

[A]

2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ のグラフは $f(k)<0$ のとき x 軸の $x>k$ の部分と $x<k$ の部分で交わる。



第 8 講　PART4　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：1，イ：3，ウ：1，エ：3

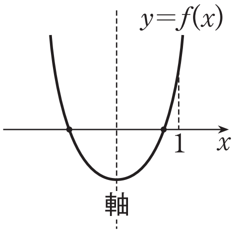
[解説]

$f(x)=x^2+2ax+4a-3$　とおく。

$f(x)=(x+a)^2-a^2+4a-3$

より，軸の式は　$x=-a$

また，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると



$$\frac{D}{4}=a^2-1\cdot(4a-3)=a^2-4a+3$$
$$=(a-1)(a-3)$$

2 次方程式 $f(x)=0$ が 1 より小さい異なる 2 つの解をもつのは，2 次関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の $x<1$ の部分が異なる 2 点で交わるときである。それは，

$D>0$　……①

($f(x)$のグラフの軸)<1　……②

$f(1)>0$　……③ [A]

において，①，②，③が同時に成り立つときである。

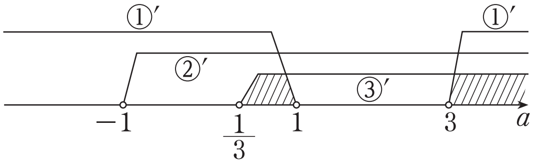
①より　$(a-1)(a-3)>0$　　$a<1$，$3<a$　……①′

②より　$-a<1$　　$a>-1$　……②′

③より　$f(1)=1^2+2a\cdot 1+4a-3>0$　　$6a-2>0$

$a>\dfrac{1}{3}$　……③′

①′，②′，③′ の共通部分を求めて　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}<a<1,\ 3<a}$



[A]　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解の存在範囲に関する条件は，2 次関数

$f(x)=ax^2+bx+c$

のグラフを用いて考えることができる。

判別式D
グラフの軸の位置
存在範囲の端点($f(1)$)

に着目する。

第 9 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：7，ウ：2，エオ：10，
カ：7，キ：3，ク：2，ケコ：10

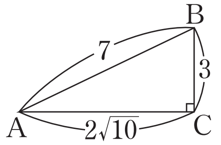
[解説]

$AC=\sqrt{7^2-3^2}=2\sqrt{10}$

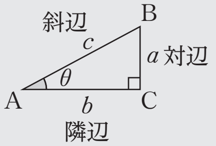
$\sin A=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}$ [A]

$\cos A=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\mathbf{2\sqrt{10}}}{\mathbf{7}}$

$\tan A=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2\sqrt{10}}}$



[A]



$\sin\theta=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{a}{c}\left(\dfrac{対辺}{斜辺}\right)$

$\cos\theta=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{b}{c}\left(\dfrac{隣辺}{斜辺}\right)$

$\tan\theta=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{a}{b}\left(\dfrac{対辺}{隣辺}\right)$

2

[正解] サ：2，シス：10，セ：7，ソ：3，
タ：7，チ：2，ツテ：10，ト：3

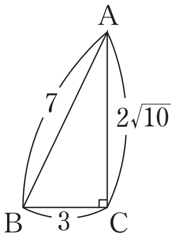
[解説]

$AC=\sqrt{7^2-3^2}=2\sqrt{10}$

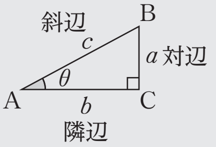
$\sin B=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{\mathbf{2\sqrt{10}}}{\mathbf{7}}$ [B]

$\cos B=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}$

$\tan B=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{\mathbf{2\sqrt{10}}}{\mathbf{3}}$



[B]



$\sin\theta=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{a}{c}\left(\dfrac{対辺}{斜辺}\right)$

$\cos\theta=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{b}{c}\left(\dfrac{隣辺}{斜辺}\right)$

$\tan\theta=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{a}{b}\left(\dfrac{対辺}{隣辺}\right)$

第９講 PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：2，ウ：1，エ：2，オ：1，カ：3

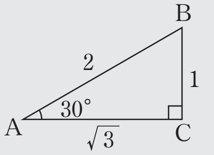
[解説]

$\sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ [A]

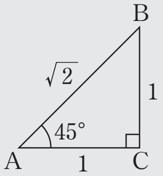
$\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$

$\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

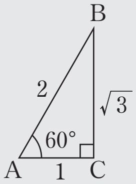
[A]



BC：AB：AC ＝ 1：2：$\sqrt{3}$



AC：BC：AB ＝ 1：1：$\sqrt{2}$



AC：AB：BC ＝ 1：2：$\sqrt{3}$

2

[正解] キク：68

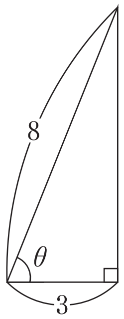
[解説]

$$\cos\theta = \frac{3}{8} = 0.375$$

三角比の表より，$\cos\theta$ の値が

0.375 に最も近い θ を求めると [B]

$$\theta \fallingdotseq 68^\circ$$



[B] 30°，45°，60° 以外の角についても，三角比の値は定められており，三角比の表に示されている。三角比の値から，角のおよその大きさを求めることができる。

第９講　PART3　確認問題 解答

1　**[正解]** アイ：11，ウ：6，エオ：11，カ：5

[解説]

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから [A]

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{11}{36}$$

θ は鋭角より，$\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{11}{36}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{11}}{6}}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{11}}{6}\div\frac{5}{6}=\frac{\sqrt{11}}{6}\times\frac{6}{5}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{11}}{5}}$$ [A]

［A］　三角比の相互関係

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

2　**[正解]** キ：5，クケ：29，コ：2，サシ：29

[解説]

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ であるから [B]

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{29}{25}$$

$$\cos^2\theta=\frac{25}{29}$$

θ は鋭角より，$\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\boldsymbol{\frac{5}{\sqrt{29}}}$$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より [B]

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{\sqrt{29}}=\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{29}}}$$

［B］　三角比の相互関係

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

第 9 講　PART4　確認問題 解答

1

[正解] アイ：24

[解説]

$\sin 66° = \sin(90° - 24°)$ [A]

$= \mathbf{\cos 24°}$

> [A]　$90° - \theta$ の三角比
> $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$

2

[正解] ウ：7

[解説]

$\cos 83° = \cos(90° - 7°)$ [B]

$= \mathbf{\sin 7°}$

> [B]　$90° - \theta$ の三角比
> $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$

3

[正解] エ：1，オカ：37

[解説]

$\tan 53° = \tan(90° - 37°)$ [C]

$= \mathbf{\dfrac{1}{\tan 37°}}$

> [C]　$90° - \theta$ の三角比
> $\tan(90° - \theta) = \dfrac{1}{\tan\theta}$

4

[正解] キク：14，ケ：2

[解説]

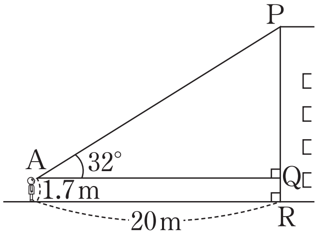
下図において

$PQ = AQ\tan 32° = 20 \times 0.6249 = 12.498$ [D]

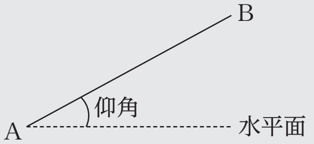
よって，建物の高さ PR は

$PR = PQ + QR = 12.498 + 1.7$

$= 14.198 \fallingdotseq \mathbf{14.2}$ **(m)**



> [D]　点 A から点 B を見るとき，B が A を通る水平面より上にあるならば，この水平面と AB とのなす角を仰角という。



第10講　PART1　確認問題 解答

1

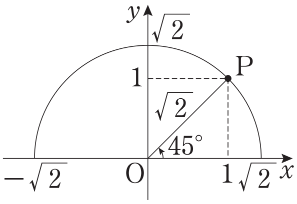
[正解] ア：②，イ：②，ウ：④

[解説]

$\sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ [A]

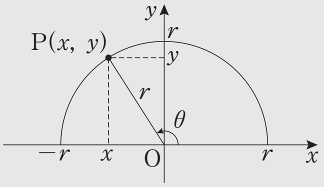
$\cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 45^\circ = \dfrac{1}{1} = 1$



[A]　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき

$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$，$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$，$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$



2

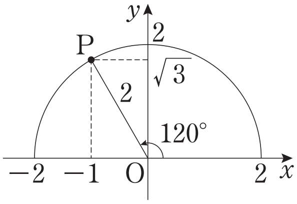
[正解] エ：②，オ：⑥，カ：⑨

[解説]

$\sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ [B]

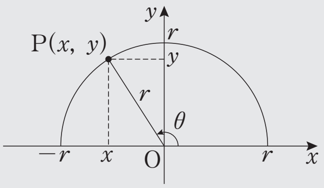
$\cos 120^\circ = \dfrac{-1}{2} = -\dfrac{1}{2}$

$\tan 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$



[B]　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき

$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$，$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$，$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$



3

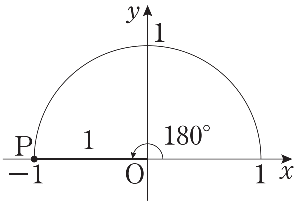
[正解] キ：⑤，ク：⑨，ケ：⑤

[解説]

$\sin 180^\circ = \dfrac{0}{1} = 0$ [C]

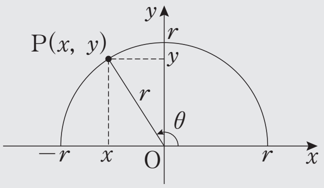
$\cos 180^\circ = \dfrac{-1}{1} = -1$

$\tan 180^\circ = \dfrac{0}{-1} = 0$



[C]　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき

$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$，$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$，$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$



第 10 講　PART2　確認問題 解答

1

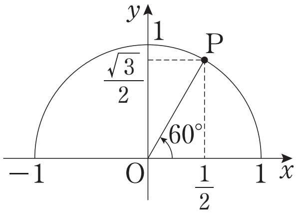
[正解] ア：③，イ：①，ウ：⑤

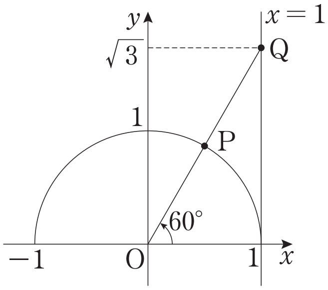
[解説]

$\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ [A]

$\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$

$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$



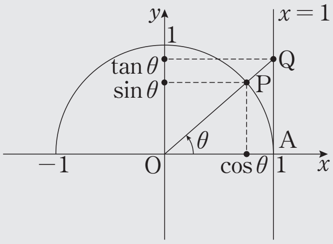


[A]　P$(x,\ y)$，$\angle$AOP $= \theta$，Q$(1,\ m)$ とすると

$\sin\theta = y$，$\cos\theta = x$，

$\tan\theta = \dfrac{y}{x} = m$

θ が鋭角（$0^\circ < \theta < 90^\circ$）の場合



2

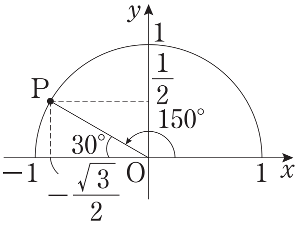
[正解] エ：①，オ：⑧，カ：⑨

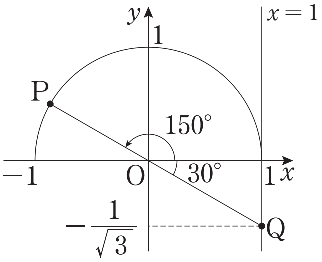
[解説]

$\sin 150^\circ = \dfrac{1}{2}$ [B]

$\cos 150^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 150^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$



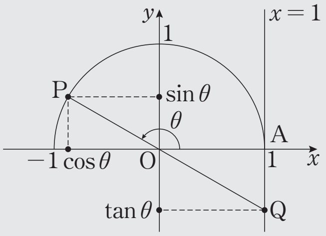


[B]　P$(x,\ y)$，$\angle$AOP $= \theta$，Q$(1,\ m)$ とすると

$\sin\theta = y$，$\cos\theta = x$，

$\tan\theta = \dfrac{y}{x} = m$

θ が鈍角（$90^\circ < \theta < 180^\circ$）の場合

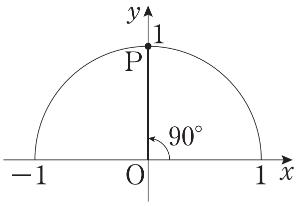


3 ［正解］キ：④，ク：⑤

［解説］

$\sin 90° = \mathbf{1}$ ［C］

$\cos 90° = \mathbf{0}$



［C］　単位円周上の点 P の座標を $P(x,\ y)$，OP と x 軸の正の部分のなす角を θ とすると
$\sin\theta = y$，$\cos\theta = x$
ただし，$\tan 90°$ は定義されない。

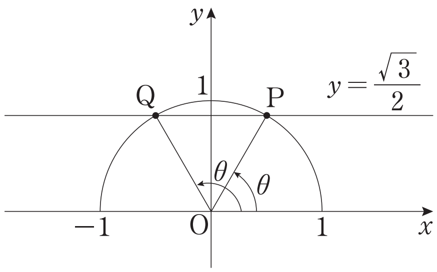
第10講　PART3　確認問題 解答

1

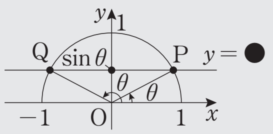
[正解] アイ：60，ウエオ：120

[解説]

単位円の $y \geqq 0$ の部分において，y 座標が $\frac{\sqrt{3}}{2}$ となるのは，下図の点 P，Q である。 [A]



[A]　$\sin\theta=$●
⇒ 直線 $y=$● と単位円の交点



よって，求める θ は

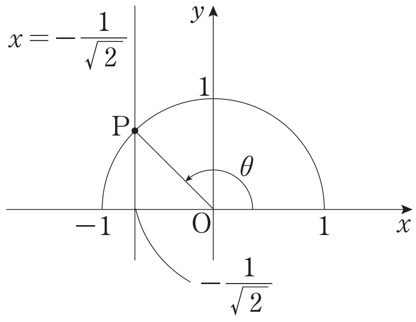
$\theta=$ **60°，120°**

2

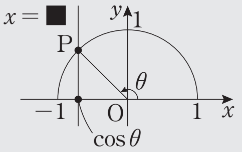
[正解] カキク：135

[解説]

単位円の $y \geqq 0$ の部分において，x 座標が $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ となるのは，下図の点 P である。 [B]



[B]　$\cos\theta=$■
⇒ 直線 $x=$■ と単位円の交点



よって，求める θ は

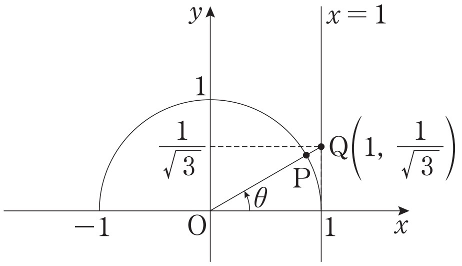
$\theta=$ **135°**

3 **[正解]** ケコ：30

[解説]

直線 $x=1$ 上に，点 $\mathrm{Q}\left(1,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ をとる。

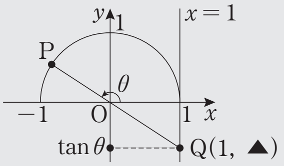
単位円の $y \geqq 0$ の部分と直線 OQ の交点は，下図の点 P である。 [C]



よって，求める θ は

$\theta = \mathbf{30^\circ}$

[C]　$\tan\theta = ▲$
⇒ 点 $(1,\ ▲)$ と原点を結ぶ直線と単位円の交点



4 **[正解]** サシス：120

[解説]

$y=-\sqrt{3}\,x$ より $\tan\theta = -\sqrt{3}$ [D]

よって　$\theta = \mathbf{120^\circ}$

[D]　直線 $y=mx$ と x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると　$m=\tan\theta$

第 10 講　PART4　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：3

[解説]

$\sin 177° = \sin(180° - 3°)$ [A]

$= \mathbf{\sin 3°}$

[A]　180°−θ の三角比
$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$

2　**[正解]** イウ：34

[解説]

$\cos 146° = \cos(180° - 34°)$ [B]

$= \mathbf{-\cos 34°}$

[B]　180°−θ の三角比
$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$

3　**[正解]** エオ：42

[解説]

$\tan 138° = \tan(180° - 42°)$ [C]

$= \mathbf{-\tan 42°}$

[C]　180°−θ の三角比
$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$

4 [正解] カ：②，キ：④

[解説]

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より [D]

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ のとき，$\cos\theta>0$ であるから [E]

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{8}{9}}=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{3}\div\frac{2\sqrt{2}}{3}$$ [D]

$$=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

$90^\circ<\theta<180^\circ$ のとき，$\cos\theta<0$ であるから [E]

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{8}{9}}=\boldsymbol{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{3}\div\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$ [D]

$$=\frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)=\boldsymbol{-\frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

[D]　三角比の相互関係

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

[E]　$0^\circ<\theta<90^\circ$ のとき

$\cos\theta>0$，$\tan\theta>0$

$90^\circ<\theta<180^\circ$ のとき

$\cos\theta<0$，$\tan\theta<0$

5 [正解] ク：③，ケ：③

[解説]

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より [F]

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$\sin\theta \geqq 0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{7}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{7}}{4}\div\frac{3}{4}$$ [F]

$$=\frac{\sqrt{7}}{4}\times\frac{4}{3}=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

[F]　三角比の相互関係

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

6 [正解] コ：①，サ：③

[解説]

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より [G]

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+2^2=5$$

$$\cos^2\theta=\frac{1}{5}$$

$\tan\theta>0$ より，$0^\circ<\theta<90^\circ$ であるから $\cos\theta>0$

よって　$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

また $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より [G]

$$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

[G]　三角比の相互関係

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

第11講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：2，ウ：3

[解説]

正弦定理より

$$\frac{a}{\sin 135^\circ}=\frac{3}{\sin 30^\circ}$$ [A]

よって

$$a=\frac{3}{\sin 30^\circ}\cdot\sin 135^\circ$$

$$=3\div\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

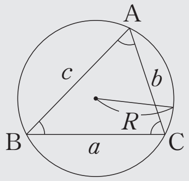
$$=\mathbf{3\sqrt{2}}$$

また，正弦定理より　$\dfrac{3\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}=2R$ [A]

よって $R=\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sin 135^\circ}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\mathbf{3}$

[A]　正弦定理

△ABC の外接円の半径を R とする。



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

2

[正解] エオ：45，カキク：105，ケコサ：135，

シス：15

[解説]

正弦定理より

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin B}=\frac{1}{\sin 30^\circ}$$ [B]

$$\sin B=\sqrt{2}\cdot\sin 30^\circ=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$C=30^\circ$ より $B<150^\circ$

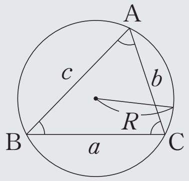
よって　$B=45^\circ，135^\circ$

$B=\mathbf{45^\circ}$ のとき　$A=180^\circ-(30^\circ+45^\circ)=\mathbf{105^\circ}$

$B=\mathbf{135^\circ}$ のとき　$A=180^\circ-(30^\circ+135^\circ)=\mathbf{15^\circ}$

[B]　正弦定理

△ABC の外接円の半径を R とする。



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

3 [正解] セソ：45，タチツ：135

[解説]

正弦定理より

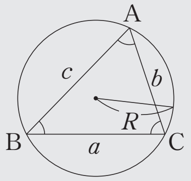
$$\frac{6}{\sin A}=6\sqrt{2}$$ [C]

よって　$\sin A=\dfrac{6}{6\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0°<A<180°$ より　$A=$ **45°，135°**

[C]　正弦定理

△ABC の外接円の半径を R とする。



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

第11講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：5

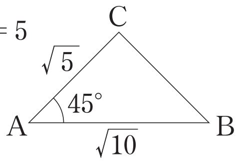
[解説]

余弦定理より

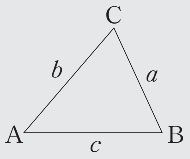
$$a^2=(\sqrt{5})^2+(\sqrt{10})^2-2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\cos 45^\circ \quad \text{[A]}$$

$$=5+10-2\sqrt{50}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=5$$

$a>0$ より　$a=\sqrt{5}$



> **[A]　余弦定理**
> △ABC について
> $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
> $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$
> $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$



2

[正解] イウ：30

[解説]

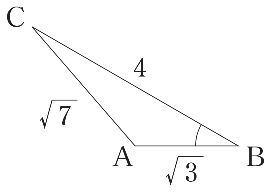
余弦定理より

$$\cos B=\frac{(\sqrt{3})^2+4^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot 4} \quad \text{[B]}$$

$$=\frac{12}{2\cdot\sqrt{3}\cdot 4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって　$B=30^\circ$



> **[B]　余弦定理**
> $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
> $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$
> $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

3

[正解] エ：3,　オカ：10

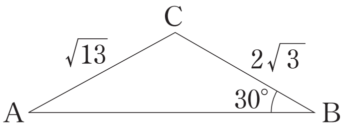
[解説]

余弦定理より

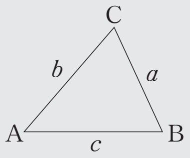
$$(\sqrt{13})^2=c^2+(2\sqrt{3})^2-2\cdot c\cdot 2\sqrt{3}\cdot\cos 30^\circ \quad \text{[C]}$$

$$c^2-6c-1=0$$

$c>0$ より　$c=3+\sqrt{10}$



> **[C]　余弦定理**
> △ABC について
> $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$
> $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$
> $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$



第 11 講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イウ：30，エオカ：105

[解説]

余弦定理より **[A]**

$$a^2=(\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\cos 45^\circ$$

$$=2+1+2\sqrt{3}+3-2\sqrt{2}(1+\sqrt{3})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=4$$

$a>0$ より　$a=\mathbf{2}$

正弦定理より **[A]**

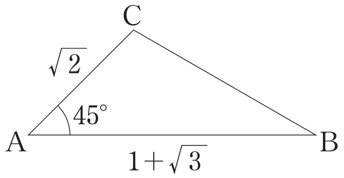
$$\frac{\sqrt{2}}{\sin B}=\frac{2}{\sin 45^\circ}$$

$$\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

$A=45^\circ$ より　$B<135^\circ$

よって　$B=\mathbf{30}^\circ$

$$C=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=\mathbf{105}^\circ$$



[A]　三角形のいくつかの辺の長さや角の大きさから，残りの辺の長さや角の大きさを求めることができる。

- ある辺とその対角がわかる
  ⇒　正弦定理の利用
- 2 辺とその間の角がわかる，3 辺がわかる
  ⇒　余弦定理の利用

2 [正解] キク：30，ケ：2，コ：3，サ：1

[解説]

$A=180^\circ-(135^\circ+15^\circ)=\mathbf{30^\circ}$

正弦定理より [B]

$$\frac{b}{\sin 135^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$$

$$b=\frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}\cdot\sin 135^\circ=\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{2}$$

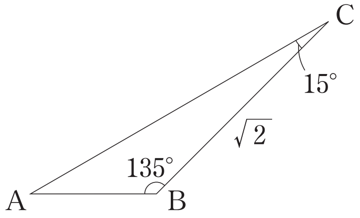
余弦定理より [B]

$$2^2=c^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot c\cdot\sqrt{2}\cdot\cos 135^\circ$$

$$c^2+2c-2=0$$

$$c=-1\pm\sqrt{3}$$

$c>0$ より　$c=\mathbf{\sqrt{3}-1}$



[B]　三角形のいくつかの辺の長さや角の大きさから，残りの辺の長さや角の大きさを求めることができる。
- ある辺とその対角がわかる
  ⇒　正弦定理の利用
- 2辺とその間の角がわかる，3辺がわかる
  ⇒　余弦定理の利用

第 11 講　PART4　確認問題 解答

1

[正解] ア：5

[解説]

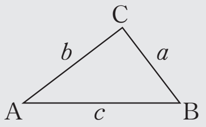
$$S=\frac{1}{2}ca\sin B \quad \text{[A]}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{2}\cdot 2\cdot \sin 45^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{2}\cdot 2\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$=5$$

[A]　三角形の面積



$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$=\frac{1}{2}ca\sin B$$

$$=\frac{1}{2}ab\sin C$$

2

[正解] イ：3，ウ：4

[解説]

余弦定理より

$$\cos A=\frac{(\sqrt{3})^2+1^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot\sqrt{3}\cdot 1}$$

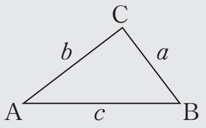
$$=\frac{3+1-7}{2\cdot\sqrt{3}\cdot 1}=\frac{-3}{2\cdot\sqrt{3}\cdot 1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A=150^\circ$$

よって　$S=\frac{1}{2}bc\sin A$ [B]

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

[B]　三角形の面積



$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$=\frac{1}{2}ca\sin B$$

$$=\frac{1}{2}ab\sin C$$

3 [正解] エ：4，オ：6

[解説]

余弦定理より

$$\cos A=\frac{5^2+4^2-7^2}{2\cdot5\cdot4}$$

$$=\frac{25+16-49}{2\cdot5\cdot4}=\frac{-8}{2\cdot5\cdot4}=-\frac{1}{5}$$

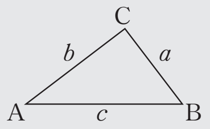
$$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2=\frac{24}{25}$$

$\sin A>0$ より　$\sin A=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$

よって　$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ [C]

$$=\frac{1}{2}\cdot5\cdot4\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=4\sqrt{6}$$

[C]　三角形の面積



$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$=\frac{1}{2}ca\sin B$$

$$=\frac{1}{2}ab\sin C$$

第12講　PART1　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：8，イ：3，ウ：3

[解説]

AD＝x とおく。

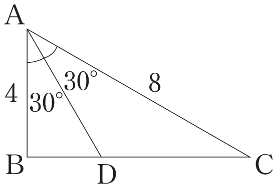
△ABC＝△ABD＋△ACD であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8\cdot \sin 60^\circ$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot x\cdot \sin 30^\circ+\frac{1}{2}\cdot 8\cdot x\cdot \sin 30^\circ$$ [A]

$$8\sqrt{3}=x+2x$$

$$x=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$



よって

$$AD=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

[A]　角の二等分線の長さ
△ABC において，∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき
三角形の面積，
△ABC＝△ABD＋△ACD であることを利用し，求めることができる。

2 [正解] エ：2

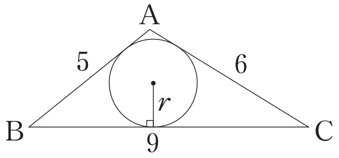
[解説]

余弦定理より

$$\cos A=\frac{6^2+5^2-9^2}{2\cdot 6\cdot 5}$$

$$=\frac{-20}{2\cdot 6\cdot 5}$$

$$=-\frac{1}{3}$$



$\sin A>0$ より

$$\sin A=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$=10\sqrt{2}$$

$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$ より [B]

$$10\sqrt{2}=\frac{1}{2}r(9+6+5)$$

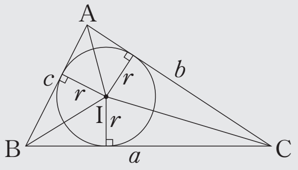
$$10\sqrt{2}=10r$$

$$r=\sqrt{\mathbf{2}}$$

[B]　三角形の内接円と面積

△ABC の面積を S, 内接円の半径を r とすると

$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$



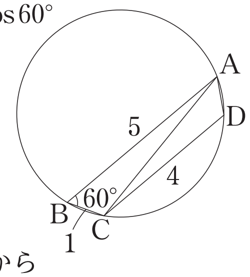
第12講　PART2　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：9，イ：3，ウ：4

[解説]

△ABC において余弦定理より

$$AC^2 = 5^2 + 1^2 - 2\cdot 5\cdot 1\cdot \cos 60^\circ$$
$$= 25 + 1 - 2\cdot 5\cdot 1\cdot \frac{1}{2}$$
$$= 21$$



AC > 0 より　$AC = \sqrt{21}$

四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

AD = x とおくと，△ACD において余弦定理より

$$(\sqrt{21})^2 = x^2 + 4^2 - 2\cdot x\cdot 4\cdot \cos 120^\circ$$
$$x^2 + 4x - 5 = 0$$
$$(x+5)(x-1) = 0$$

$x > 0$ より　$x = 1$

よって　AD = 1

四角形の面積 S は

$$S = \triangle ABC + \triangle ACD$$ [A]
$$= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 5\cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1\cdot \sin 120^\circ$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 5\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1\cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \boldsymbol{\frac{9\sqrt{3}}{4}}$$

[A]　円に内接する四角形の面積
円に内接する四角形の対角の和が 180° であることを利用し，四角形の面積を，対角線によって分割された2つの三角形の面積の和として求める。

第 12 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：6，ウ：2

[解説]

三平方の定理より

$$AC=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3})^2}=3$$

$$AF=\sqrt{(\sqrt{6})^2+2^2}=\sqrt{10}$$

$$CF=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$$

△AFC において余弦定理より

$$\cos\angle CAF=\frac{3^2+(\sqrt{10})^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot 3\cdot \sqrt{10}}$$

$$=\frac{9+10-7}{2\cdot 3\cdot \sqrt{10}}=\frac{12}{2\cdot 3\cdot \sqrt{10}}=\frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$\sin\angle CAF=\sqrt{1-\cos^2\angle CAF}$$

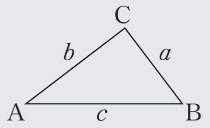
$$=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$$

よって △AFC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot \sqrt{10}\cdot \sin\angle CAF$$ [A]

$$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot \sqrt{10}\cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{6}}{2}}$$

[A]　三角形の面積



$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

2 **[正解]** エ：2，オ：3，カ：3

[解説]

$\triangle\mathrm{AFC}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$ より，四面体 BAFC の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{BFC}\cdot\mathrm{AB}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot2\times\sqrt{6}=\sqrt{2}$$

[B]

$V=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{AFC}\cdot\mathrm{BI}$ より　$\sqrt{2}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\cdot\mathrm{BI}$

よって　$\mathrm{BI}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

[B]
四面体に含まれる三角形に注目する。
四面体 BAFC の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{BFC}\cdot\mathrm{AB}=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{AFC}\cdot\mathrm{BI}$$

などと表される。

第12講　PART4　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：1，イ：3

[解説]

$\angle\mathrm{OMA}=\angle\mathrm{OMB}=90^\circ$，$\angle\mathrm{OAM}=60^\circ$ より，

△OAM において [A]

$$\mathrm{OM}=\mathrm{OA}\sin 60^\circ=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

同様に　$\mathrm{CM}=3\sqrt{3}$

△OMC において，余弦定理より [A][B]

$$\cos\theta=\frac{(3\sqrt{3})^2+(3\sqrt{3})^2-6^2}{2\cdot3\sqrt{3}\cdot3\sqrt{3}}=\frac{18}{2\cdot3^3}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

[A]　四面体に含まれる三角形に注目し，三角比や余弦定理を利用し，三角形の辺の長さや高さ，角度などを求める。

[B]　余弦定理

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

2 **[正解]** ウ：2，エ：6

[解説]

$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ より

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって，△OMH において [C]

$$\mathrm{OH}=\mathrm{OM}\sin\theta=3\sqrt{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\boldsymbol{2\sqrt{6}}$$

[C]　四面体に含まれる三角形に注目し，三角比や余弦定理を利用し，三角形の辺の長さや高さ，角度などを求める。

第 13 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：7，イ：2

[解説]

平均値は

$$\frac{1}{10}(7+8+4+7+10+8+9+2+10+7)$$ [A]

$$=\frac{72}{10}=\mathbf{7.2}\ (点)$$

> [A]　n 個の値 x_1，x_2，…，x_n について，平均値 $\overline{x}$ は
> $$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

2

[正解] ウ：④

[解説]

与えられたデータを値の小さい順に並べると

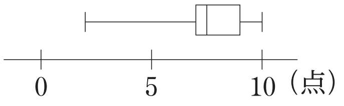
2，4，7，7，7，8，8，9，10，10

第 1 四分位数は　$Q_1=7$（点）

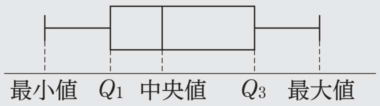
第 2 四分位数は　$Q_2=\frac{7+8}{2}=7.5$（点）

第 3 四分位数は　$Q_3=9$（点）

箱ひげ図は下図 [B]



> [B]　箱ひげ図
> 最小値，第 1 四分位数 Q_1，中央値，第 3 四分位数 Q_3，最大値を，箱と線（ひげ）を用いて 1 つの図で表したもの。



3

[正解] エ：②

[解説]

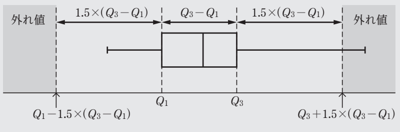
$$Q_1-1.5(Q_3-Q_1)=7-1.5\times2=4$$

$$Q_3+1.5(Q_3-Q_1)=9+1.5\times2=12$$

よって，外れ値は 4 以下の値または 12 以上の値である。 [C]

したがって，与えられたデータの中で外れ値は，2 と 4

> [C]　外れ値



第 13 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] アイ：11

[解説]

$$\overline{x}=\frac{1}{8}(7+8+10+10+11+13+14+15)$$ [A]

$$=\frac{88}{8}=\mathbf{11}$$

[A]　平均値

$$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

2

[正解] ウ：7，エ：②

[解説]

$$s_x{}^2=\frac{1}{8}\{(-4)^2+(-3)^2+(-1)^2+(-1)^2+0^2+2^2+3^2+4^2\}$$ [B]

$$=\frac{56}{8}=\mathbf{7}$$

$$s_x=\sqrt{s_x{}^2}=\sqrt{7}=2.645\cdots\fallingdotseq\mathbf{2.65}$$ [C]

[B]　分散

$$s^2=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}$$

[C]　標準偏差…分散の正の平方根

3

[正解] オ：6

[解説]

$$\overline{y}=\frac{1}{10}(-2-1-1+0+1+1+1+2+2+3)$$ [D]

$$=\frac{6}{10}=\mathbf{0.6}$$

[D]　平均値

$$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

4 [正解] カ：2，キク：24，ケ：③

[解説]

$$\overline{y^2}=\frac{1}{10}\{(-2)^2+(-1)^2+(-1)^2+0^2+1^2+1^2+1^2+2^2+2^2+3^2\}$$

$$=\frac{26}{10}=2.6$$

よって　$s_y{}^2=\overline{y^2}-(\overline{y})^2=2.6-0.6^2=\mathbf{2.24}$ [E]

$$s_y=\sqrt{s_y{}^2}=\sqrt{2.24}=\frac{2\sqrt{14}}{5}=1.496\cdots\fallingdotseq\mathbf{1.50}$$

[F]

[E]　分散
$s^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2$
$=(x^2$ の平均値$)-(x$の平均値$)^2$

[F]　標準偏差…分散の正の平方根

5 [正解] コ：①

[解説]

$s_x\fallingdotseq2.65$，$s_y\fallingdotseq1.50$ より，$s_x>s_y$ であるから，**A の方が散らばりの度合いが大きい。** [G]

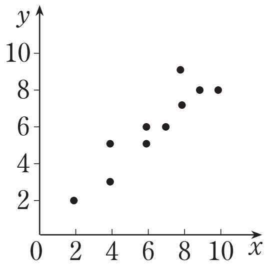
[G]　標準偏差が大きい方が散らばりの度合いが大きい。

第13講　PART3　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：①，イ：①

[解説]

散布図は次のようになる。 [A]



正の相関がある。 [B]

[A]　x と y の値の組を座標 (x, y) としてとっていく。

[B]　散布図における点の分布が右上がりの直線に近い
→正の相関がある
右下がりの直線に近い
→負の相関がある
どちらの傾向もない
→相関がない

2　**[正解]** ウエ：71

[解説]

$$\overline{x}=\frac{1}{8}(1+4+5+6+7+8+8+9)$$
$$=\frac{48}{8}=6$$
$$\overline{y}=\frac{1}{8}(7+11+8+10+10+10+13+11)$$
$$=\frac{80}{8}=10$$
$$s_x{}^2=\frac{1}{8}\{(-5)^2+(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2+2^2+3^2\}$$
$$=\frac{48}{8}=6$$

より　$s_x=\sqrt{s_x{}^2}=\sqrt{6}$

$$s_y{}^2=\frac{1}{8}\{(-3)^2+1^2+(-2)^2+0^2+0^2+0^2+3^2+1^2\}$$
$$=\frac{24}{8}=3$$

より　$s_y=\sqrt{s_y{}^2}=\sqrt{3}$

$$s_{xy}=\frac{1}{8}\{(-5)\cdot(-3)+(-2)\cdot 1+(-1)\cdot(-2)+0\cdot 0+1\cdot 0+2\cdot 0+2\cdot 3+3\cdot 1\}$$ [C]
$$=\frac{24}{8}=3$$

よって，相関係数は

$$r=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}=\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1.41}{2}=0.705\fallingdotseq\mathbf{0.71}$$

[D]

[C]　共分散

$$s_{xy}=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})\}$$

[D]　相関係数

$$r=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}=\frac{(x\text{と}y\text{の共分散})}{(x\text{の標準偏差})\times(y\text{の標準偏差})}$$

第13講　PART4　確認問題 解答

1

[正解] ア：①

[解説]

仮説①　「野球よりサッカーを好む人の方が多い」[A]

仮説②　「野球を好む人とサッカーを好む人は同程度である」[A]

表より，コインを 30 回投げて表が 20 回以上出る場合の相対度数は

$$\frac{13+7+4}{500}=\frac{24}{500}=0.048$$

この結果から，仮説②のもとで 30 人中 20 人以上がサッカーを好むと回答する確率は 0.048 であると考えられる。

これは基準となる確率 0.05 よりも小さいから，仮説②は正しくないと判断できる。

よって，仮説①は正しいと判断できる。[A]

したがって，**サッカーを好む人の方が多いと判断してよい。**

[A]　仮説検定の手順

Ⅰ　主張したい仮説①を立てる

Ⅱ　仮説①に反する仮説②を立てる

Ⅲ　仮説②が正しいかどうかを統計的に検証する

（ⅰ）基準となる確率より小さい場合
「正しくないと判断できる」
→仮説①が正しいと判断できる

（ⅱ）基準となる確率より大きい場合
「正しくないとは判断できない」
→仮説①が正しいとは判断できない

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。